With the Compliments

of

The Cultural Counsellor

of

The Iranian Embassy

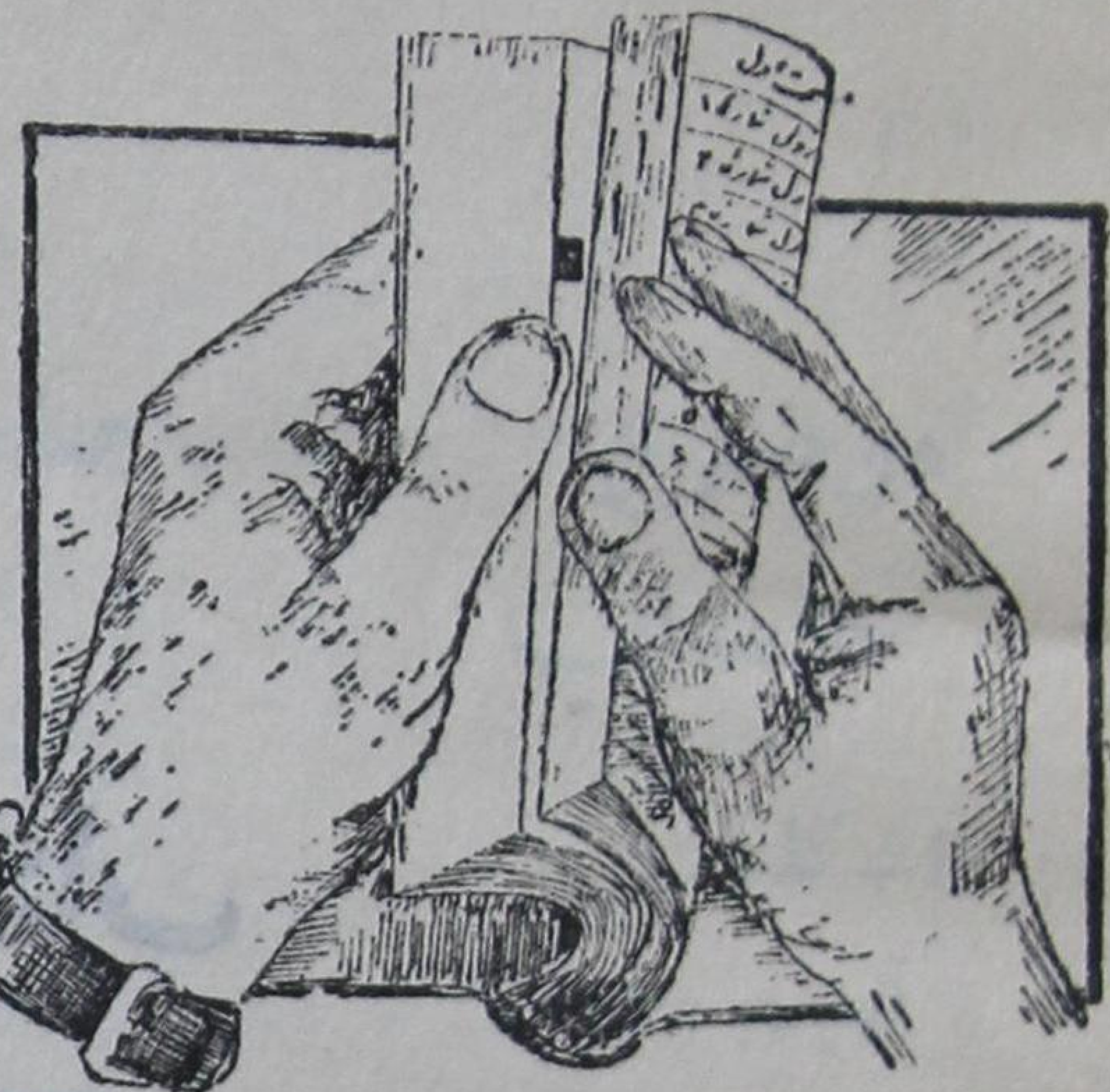
New Delhi.

# خلاصهٔ ریاضیات

## متوسطه

چاپ اول - ۱۳۳۶

# راهنمای کتاب



لب کتاب را بطوریکه
درشکل بالا می بینید
کمی باز کنید ؛ نشانی
سیاهی که در مقابل
علامت ←— این صفحه
بمحاذات هر قسمت
نمودار میشود صفحهٔ اول
آن قسمت از مطالب
کتاب است انگشت
شست دست چپ را روی
نشانی سیاه بگذارید
و قسمتی را که

# اهداء کتاب

---

این کتاب را بکسانیکه برای

پیشرفت فرهنگ کمر همت

بسته وبا روحی پاك در این

راه مردانه میکوشند تقدیم

میکنیم

# فهرست

| موضوع | صفحه |
|---|---|
| واسطه عددی | ۱۹ |
| XIV-مقیاسها | ۲۰ |
| واحدطول دردستگاه‌متری | ۲۰ |
| واحدسطح دردستگاه‌متری | ۲۰ |
| « حجم » | ۲۱ |
| « پیمانه » | ۲۱ |
| « وزن » | ۲۱ |
| رابطه بین وزن وحجم | ۲۲ |
| وزن مخصوص | ۲۲ |
| واحد پول | ۲۳ |
| XV-مقیاسهای سابق ایران | ۲۴ |
| واحد طول | ۲۴ |
| « وزن | ۲۴ |
| رابطه بین مقیاسهای فعلی و قدیم | ۲۴ |
| واحد زمان | ۲۵ |
| اقسام سال | ۲۵ |
| تعدیل | ۲۵ |
| مطابقت تاریخها | ۲۶ |
| XVI-اعداد مرکب | ۲۶ |
| چهار عمل اصلی در اعداد مرکب | ۲۶ و ۲۷ |
| XVII-اربعه‌متناسبه | ۲۷ |
| تناسب مستقیم ومعکوس | ۲۸ |

| موضوع | صفحه |
|---|---|
| XVIII-آمیزه | ۲۸ |
| آلیاژ | ۲۹ |
| XIX-مرابحه مفرد | ۲۹ |
| فورمولهای مرابحه | ۳۰ |
| XX-تنزیل | ۳۰ |
| فورمول تنزیل | ۳۱ |
| XXI-جذر | ۳۱ |
| استخراج جذراعدادصحیح | ۳۲ |
| « « « اعشاری | ۳۳ |
| تقریب | ۳۳ |
| امتحان جذر | ۳۴ |
| XXII- کعب | ۳۴ |
| استخراج کعب اعدادصحیح | ۳۵ |
| « « « اعشاری | ۳۶ |
| XXIII-اعداد اصم | ۳۶ |
| ضرب و تقسیم ریشه دوم (جذر) | ۳۷ |

## جبر

| موضوع | صفحه |
|---|---|
| I-تعاریف | ۳۹ |
| حروف و نشانه ها | ۳۹ |
| عدد جبری | ۴۰ |
| عبارت جبری | ۴۱ |
| اتحاد | ۴۱ |

| موضوع | صفحه |
|---|---|
| معادلات معکوسه درجه ۳ و ۴ و ۵ | ۶۲ |
| معادلات اصم | ۶۴ |
| XVI- نامساوی | ۶۵ |
| خواص نامساوی | ۶۵ |
| نا مساوی درجه اول یك مجهولی | ۶۵ |
| نا مساوی درجه دوم | ۶۶ |
| نا مساوی درجه m ام | ۶۶ |
| نامساوی کسری | ۶۷ |
| XVII- تصاعد حسابی | ۶۷ |
| XVIII- تصاعد هندسی | ۶۹ |
| XIX- لگاریتم | ۷۰ |
| خواص لگاریتم | ۷۱ |
| چهار عمل اصلی در لگاریتم | ۷۴ |
| جدولهای لگاریتم | ۷۶ |
| مانتیس لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰ | ۷۷ |
| XX- ربح مرکب | ۷۸ |
| XXI- قسط السنین | ۷۸ |
| XXII- نمایش هندسی | ۸۰ |
| مختصات دکارتی | ۸۱ |
| مختصات قطبی | ۸۲ |
| بستگی بین مختصات قطبی و قائم | ۸۲ و ۸۳ |
| مختصات کروی | ۸۳ |
| تغییر محورهای مختصات | ۸۳ |
| دوران محورها | ۸۴ |
| طول قطعه خط | ۸۴ |
| تقسیم خط به نسبت K | ۸۵ |
| رابطه شال | ۸۵ |
| رابطه فیثاغورث | ۸۶ |
| « اولر | ۸۶ |
| « استوارت | ۸۶ |
| XXIII- متغیر وتابع | ۸۷ |
| اقسام تابع | ۸۷ و ۸۸ |
| XXIV- حدود | ۸۸ |
| خواص حدود | ۸۹ |
| XXV رفع ابهام | ۸۹ |
| XXVI- مشتقات | ۹۱ |
| محاسبه مشتق | ۹۲ |
| مشتق توابع متداول | ۹۳ |
| خواص مشتق | ۹۵ |
| رفع ابهام بوسیله مشتق | ۹۵ |
| XXVII- تغییرات توابع | ۹۶ |
| تغییرات تابع درجه اول | ۹۶ |
| ماکزیمم و می نیمم | ۹۷ |
| تغییرات تابع درجه دوم | ۹۸ |

| موضوع | صفحه |
|---|---|

# مثلثات

| موضوع | صفحه |
| --- | --- |

## مخروطات



## هندسه رقومی وترسیمی

| موضوع | صفحه |
|---|---|

# مقدمه

رشته‌های مختلف علوم ، خاصه علوم ریاضی ، چنان بیکدیگر بستگی دارند که‌درموارد بسیار فهم و درك مطلبی در یك رشته بمراجعه مطالب متنوع در رشته های دیگر محتاج میباشد .

ازاین روی طالب علم باید کتابهای متعدد دردسترس خود داشته باشند و گاه و بیگاه بآنها مراجعه کنند .

این کار برای کسانیکه با تفنن و فراغ خاطر بمطالعه میپردازند دشوارنیست ، اما برای جوانانیکه دردوره های متوسطه وعالی بکسب دانش مشغولند جای آن نیست که مقدار زیادی از وقت گرانبهایشان که باید برای فرا گرفتن مواد درسی مصروف شود به تجسس درکتاب های مختلف صرف گردد .

ما ، برای اینکه خدمت وکمکی بدانش آموزان و

دانشجویان جوان کرده باشیم ، آنچه در رشته های مختلف ریاضیات مقدماتی باید آموخت یکجا گرد آورده و در یك مجلد در دسترس آنان قرار میدهیم .

در این مجموعه نظری ببرنامه کنونی تحصیلات متوسطه نداشته و مطالب کتاب را برطبق آن مرتب نکرده ایم ، بلکه آنچه درحساب، جبر ، هندسه ومخروطات ، هندسه های رقومی و ترسیمی ، مثلثات ، مکانیك و هیئت باید آموخته شود بطور مختصر ، وشاید مفید ، جمع آوری نموده ایم .

برای هیچیك ازمطالب اقامهٔ دلیل و برهان نکرده ایم چه دراین صورت کتاب بسیارمفصل میشد وجا دادن مطالب در یك مجلد میسر نمیگردید .

این کتاب که با قطع کوچك تهیه شده بهترین رفیق شفیق جوان دانشجوست و مطالبی را که وی از کتابهای متعدد آموخته است یادآوری میکند واورا دراینکه هرلحظه بکتابهای مختلف درسی مراجعه کند بی نیاز میسازد . همه جا همراه او ، همیشه در دسترس او و در هرلحظه طرف مراجعه او میتواند بود .

ما بسیار کوشیده‌ایم که کتاب حاضررا کامل وجامع تهیه وتدوین کرده باشیم، ولی تردیدی نداریم که نقص‌های بسیاردارد وتکمیل آن محتاج براهنمائی وکمك همکاران عزیز و معلمان دانشمند میباشد.

این کار هرچند بظاهرخرد باشد، شگرفتر ازآنست که بتوانیم ادعا کنیم که آنرا چنانکه شایسته است انجام داده‌ایم. چنین‌داعیه‌ای نداریم و از دبیران فاضل‌خواستاریم که مارا بمعایب ونواقص کتاب واقف‌سازند تادر چاپهای بعد اثری مفید تر وجامع تر در دسترس اهل طلب قرار داده شود.

امیدواریم تا چاپهای دیگر کتاب، چاپخانه های ما بوسایل چاپ کتب ریاضی مجهزتر شوند تا نواقصی‌هم که از حیث حروف وعلامات ریاضی، یا احیاناً کمی کارگرمتخصص پیدا شده است ازمیان برود.

بهمن ماه ۱۳۲۶

احمد بیرشك ـ احمد انواری

# حساب

## ۱ - کلیات

۱ - آنچه که قابل کم و زیاد شدن باشد کمیت است .

۲ - قسمت محدودی از کمیت را مقدار گویند :

۳ - واحد یا یکه هر کمیت مقدار مشخص و معینی از آن کمیت است که برای سنجیدن مقادیر همجنس خود بکار میرود .

٤ - **عدد** نتیجه سنجیدن هر مقدار با واحد همجنس خودش میباشد .

٥ - عدد درست ( صحیح ) عبارتست از اجتماع چند واحد تمام .

٦ - سلسله اعداد طبیعی رشته اعدادیست که از یك شروع شود و در آن هر عدد یك واحد از عدد بلا فاصله قبل از آن بزرگتر باشد . این سلسله بی انتهاست .

۷ - پایه یا مبنای شمار معین میکند که هر واحد مرتبهٔ بالاتر چند برابر واحد مرتبهٔ پائین تر است .

۸ - پایه شمار معمولی ده میباشد و این شمار را شمار دهدهی (اعشاری) میگویند .

۹ - در اعداد دهدهی (اعشاری) ده واحد از هر مرتبه واحد مرتبهٔ بلافاصله بالاتر را تشکیل میدهد .

۱۰ - در هر عدد رقمی که سمت چپ رقم دیگر نوشته شود نمایش مرتبه بلافاصله بالاتر خواهد بود .

## II - جمع

۱۱ - در جمع اعداد تغییر محل عوامل جمع تغییری در حاصل جمع نمیدهد.

۱۲ - بجای چند عامل جمع میتوان حاصل جمع آنها را قرار داد، یعنی :

$$N=a+b+c+d+e=(a+b)+(c+d)+e$$

۱۳ - برای امتحان جمع بیکی از این طریقه ها عمل باید کرد :

الف - اگر در موقع جمع اعداد را از پائین ببالا جمع کرده باشیم برای امتحان آنها رااز بالا بپائین جمع میکنیم.

ب - اعداد رادسته‌دسته نموده هر دسته را جداگانه‌جمع میکنیم وحاصل جمعها را با هم‌جمع مینمائیم .

## III - تفریق

۱٤ - هرگاه یکعدد بعوامل تفریق (مفروق ومفروق منه یا کاسته وکاهشیاب ) اضافه یا ازآنها کم کنیم در تفاضل تغییری پیدا نمیشود . یعنی : $a-b=(a\pm c)-(b\pm c)$

۱۵ - برای کاستن مجموع چند عدد از یك عدد ( یا مجموع چند عدد ) میتوان یکایك آنها را ازاین عدد ( یا مجموع چند عدد ) کاست ، یعنی :

$$(a+b+c)-(d+e+f)=a+b+c-d-e-f$$

۱٦ - امتحان تفریق را میتوان بیکی از طریقه های

زیر انجام داد :

الف - تفاضل را از کاهشیاب کسر میکنیم، کاسته بدست می آید.

ب - تفاضل را با کاسته جمع می کنیم، کاهشیاب بدست می آید.

## IV - ضرب

۱۷ - درضرب دو یا چند عدد تغییر محل عاملهای ضرب درحاصلضرب اثری ندارد ، یعنی: $a \times b \times c = b \times a \times c$

۱۸ - برای ضرب مجموع یا تفاضل چند عدد در یك عدد آن عدد را درهریك از عوامل جمع یا تفریق ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را باهم جمع یا ازهم تفریق میکنیم، یعنی:

$$(a+b+c)\ m = am+bm+cm$$

۱۹ - بجای چند عامل میتوان حاصل ضرب آنها را قرارداد، یعنی: $abcdefg = (fbg) \times (da) \times (ec)$

۲۰ - برای ضرب یك عدد در حاصل ضرب چند عدد میتوان آنرا در یکی از عوامل ضرب نموده حاصل را در سایر عوامل ضرب کرد ، یعنی : $abcdef \times n = abc(dn)ef$

۲۱ - برای ضرب حاصل ضرب چند عدد در حاصل ضرب چند عدد دیگر میتوان تمام عوامل را درهم ضرب نمود، یعنی : $abcd \times pq = abcdpq$

۲۲ - در ضرب دو عدد هرگاه یکی از دوعامل ضرب

را چند مرتبه بزرك یا کوچك کنیم حاصل ضرب نیز همان اندازه بزرك یا کوچك میشود.

۲۳ - هر گاه یکی از عاملهای ضرب را در عددی ضرب و عامل دیگر را بر همان عدد تقسیم کنیم در حاصل ضرب تغییری حاصل نمیشود.

۲٤ - برای امتحان ضرب جای مضروب (بس شمرده) ومضروب فیه (بس شمار) راباهم عوض میکنیم و عمل ضرب را تکرار مینمائیم.

## V- تقسیم

۲۵ - در هر تقسیم اگر حاصل ضرب بهر (خارج قسمت) در بخشیاب (مقسوم علیه) را با باقیمانده جمع کنیم بخشی (مقسوم) بدست میآید. یعنی اگر D بخشی و d بخشیاب و q بهر و r باقیمانده باشد: $D = dq + r$

و همچنین $dq < D < d(q+1)$

۲٦ - اگر مقسوم و مقسوم علیه (بخشی و بخشیاب) را بر عددی تقسیم (یا در عددی ضرب) کنیم خارج قسمت تغییری نمیکند ولی باقیمانده بر آن عدد تقسیم (یا در آن عدد ضرب) میشود.

۲۷ - برای تقسیم یك عدد بر حاصل ضرب چند عدد میتوان آنرا بر یکی از عوامل ضرب تقسیم نموده خارج-قسمت را بر عامل دوم و خارج قسمت جدید را بر عامل سوم تقسیم کنیم و عمل را ادامه دهیم تا آخرین خارج قسمت

بدست آید .

۲۸ - برای امتحان تقسیم میتوان خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل را با باقیمانده جمع کرد ، در صورت صحت مقسوم بدست میآید . یا باقیمانده را ازمقسوم کم نمود، در صورت صحت تفاضل برمقسوم علیه قابل قسمت می باشد .

## VI_قوای اعداد (توان)

۲۹ - قوه mام هرعدد عبارتست از حاصل ضرب m مرتبه‌آن عدد

$$a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{m \text{ مرتبه}}$$

a را پایه و m را نما گویند.

۳۰ - قوه اول هر عدد مساوی خود آن عدد است یعنی :

$$a^1 = a$$

۳۱ - هر عدد بقوه صفر مساوی است با یك، یعنی :

$$a^0 = 1$$

۳۲ - حاصل ضرب دو قوه با پایه مشترك مساویست با همان پایه بقوهٔ مجموع نماها، یعنی

$$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$$

۳۳ - حاصل ضرب‌دوقوه با نماهای‌مشترك مساویست با حاصل ضرب پایه‌ها بقوهٔ همان نمای مشترك. یعنی :

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

۳٤ - توان m ام حاصل ضرب چند عدد مساویست باحاصل-ضرب توانهای m ام آن اعداد . یعنی :

$$(abc)^m = a^m . b^m . c^m$$

۳٥ - اگر توان m ام عددی را بخواهیم به توان جدیدی برسانیم باید پایه را به توان حاصل ضرب نماها رساند یعنی :

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

۳٦ - خارج قسمت دوقوه مختلف یك عدد مساویست با همان پایه که به توان تفاضل دو نما برسد، یعنی :

$$a^m : a^n = a^{(m-n)}$$

۳۷ - باقیماندهٔ تقسیم قوهٔ m ام هر عدد D بر عدد دیگر d مساویست با باقیمانده قوه m ام باقیمانده تقسیم $\frac{D}{d}$ بر d .

# VII - مساوی ونامساوی

۳۸ - اگر دوطرف دو یا چند تساوی را با یکدیگر جمع یا از یکدیگر تفریق ، در یکدیگر ضرب یا بر یکدیگر تقسیم کنیم نتیجه یك تساوی خواهد بود :

$$a = b \qquad c = d$$

$$a + c = b + d \qquad a - c = b - d$$

$$a . c = b . d \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

۳۹ - اگر بین دوطرف دو یاچند نا مساوی یکجهت اعمال جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم بجا آوریم نتیجه همواره یك نا مساوی در همان جهت خواهد بود :

$$a>b \qquad c>d$$

$$a\pm c>b\pm d \qquad a.c>b.d \qquad \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$$

**تبصره** - در صورتیکه اعمال چهارگانه بین چند تساوی وچند نا مساوی یکجهت بعمل آید نتیجه یك نا مساوی در همان جهت خواهد بود.

## VIII- بخش پذیری یا قابلیت تقسیم

۴۰ - عددی برعدد دیگر قابل قسمت است که باقیمانده تقسیمش بر آن صفر باشد. عدد اول را **مضرب** دومی ودومی را **مقسوم علیه** یا **عاد** اولی مینامند و میگویند دومی اولی را عاد میکند.

۴۱ - هر عدد که رقم سمت راست آن صفر یا جفت باشد بر ۲ قابل قسمت است.

۴۲ - هرعدد که دو رقم سمت راست آن صفر باشند یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۴ باشد بر ۴ قابل قسمت است.

۴۳ - عددی بر ۸ قابل قسمت است که سه وقم سمت واست آن صفر بوده یاعددی تشکیل دهند که مضرب ۸ باشد.

۴۴ - عددی بر ۳ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد. اگر تقسیم مجموع ارقام یك عدد بر

۳ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم آن عدد هم بر ۳ همان خواهد بود.

۴۵ - عددی بر ۵ قابل قسمت است که رقم سمت راست آن صفر یا ۵ باشد.

۴۶ - عددی بر ٦ قابل قسمت است که بر ۲ و ۳ قابل قسمت باشد.

۴۷ - عددی بر ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۹ قابل قسمت باشد. اگر تقسیم مجموع ارقام عددی بر ۹ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم عدد هم بر ۹ همان خواهد بود.

۴۸ - عددی بر ۱۱ قابل قسمت است که تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و مجموع ارقام مراتب فردش صفر و یا قابل قسمت بر ۱۱ باشد. و الا باقیمانده تقسیم همان تفاضل یا زیادتی ۱۱ بر آن تفاضل خواهد بود.

مثال: ۱) ۷۹۸۸۴۲ بر ۱۱ قابل قسمت است.

۲) ۴۷۵۸ بر ۱۱ قابل قسمت نیست و باقیمانده تقسیم و تفاضل ارقام مراتب زوج و فرد ٦ میباشد.

۳) عدد ۳۵۴۷۵۸۰ بر ۱۱ قابل قسمت نیست و تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و فرد ۳ و باقیمانده تقسیم ۸ یا (۳-۱۱) است

## IX - اعداد اول

۴۹ - هر عددی که جز بر خود و یك به عدد دیگری قابل قسمت نباشد عدد اول نامیده میشود.

۵۰ - اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰۰ عبارتند از:

٣٧ ٤١ ٣١ ٢٩ ٢٣ ١٩ ١٧ ١٣ ١١ ٧ ٥ ٣ ٢ ١

٤٣ ٤٧ ٥٣ ٥٩ ٦١ ٦٧ ٧١ ٧٣ ٧٩ ٨٣ ٨٩ ٩٧

١٠١ ١٠٣ ١٠٧ ١٠٩ ١١٣ ١٢٧ ١٣١ ١٣٧ ١٣٩

١٤٩ ١٥١ ١٥٧ ١٦٣ ١٦٧ ١٧٣ ١٧٩ ١٨١ ١٩١

١٩٣ ١٩٧ ١٩٩ ٢١١ ٢٢٣ ٢٢٧ ٢٢٩ ٢٣٣ ٢٣٩

٢٤١ ٢٥١ ٢٥٧ ٢٦٣ ٢٦٩ ٢٧١ ٢٧٧ ٢٨١ ٢٨٣

٢٩٣ ٣٠٧ ٣١١ ٣١٣ ٣١٧ ٣٣١ ٣٣٧ ٣٤٧ ٣٤٩

٣٥٣ ٣٥٩ ٣٦٧ ٣٧٣ ٣٧٩ ٣٨٣ ٣٨٩ ٣٩٧ ٤٠١

٤٠٩ ٤١٩ ٤٢١ ٤٣١ ٤٣٣ ٤٣٩ ٤٤٣ ٤٤٩ ٤٥٧

٤٦١ ٤٦٣ ٤٦٧ ٤٧٩ ٤٨٧ ٤٩١ ٤٩٩ ٥٠٣ ٥٠٩

٥٢١ ٥٢٣ ٥٤١ ٥٤٧ ٥٥٧ ٥٦٣ ٥٦٩ ٥٧١ ٥٧٧

٥٨٧ ٥٩٣ ٥٩٩ ٦٠١ ٦٠٧ ٦١٣ ٦١٧ ٦١٩ ٦٣١

٦٤١ ٦٤٣ ٦٤٧ ٦٥٣ ٦٥٩ ٦٦١ ٦٧٣ ٦٧٧ ٦٨٣

٦٩١ ٧٠١ ٧٠٩ ٧١٩ ٧٢٧ ٧٣٣ ٧٣٩ ٧٤٣ ٧٥١

٧٥٧ ٧٦١ ٧٦٩ ٧٧٣ ٧٨٧ ٧٩٧ ٨٠٩ ٨١١ ٨٢١

٨٢٣ ٨٢٧ ٨٢٩ ٨٣٩ ٨٥٣ ٨٥٧ ٨٥٩ ٨٦٣ ٨٧٧

٨٨١ ٨٨٣ ٨٨٧ ٩٠٧ ٩١١ ٩١٩ ٩٢٩ ٩٣٧ ٩٤١

٩٤٧ ٩٥٣ ٩٦٧ ٩٧١ ٩٧٧ ٩٨٣ ٩٩١ ٩٩٧ .

جدول اعداد اول معروفست بغربال اراتستن

٥١ - تجزیه یك عدد بعوامل اول تشکیل دهندهٔ آن عدد فقط بیك طریق ممکن است.

٥٢ - دوعدد را نسبت بهم اول گویند وقتی عادمشترك نداشته باشند، یعنی عددی نتوان یافت که هردو بر آن قابل‌قسمت باشند.

۵۳ - هر دو عدد غیر اول اقلاً یك عاد اول خواهند داشت .

۵۴ - رشتهٔ اعداد اول بی پایان است .

۵۵ - هر عدد اولی که عدد دیگر را عاد نکند نسبت بآن اول است .

۵۶ - هر عدد غیر اول حاصلضرب چند عدد اول است. بدست آوردن عوامل اول هر عدد غیر اول را تجزیهٔ آن بعوامل اول گویند .

## X - بزرگترین عاد (یا مقسوم علیه) مشترك

علامت اختصاری آن بعم میباشد .

۵۷ - دو یا چند عدد میتوانند عاد های مشترك بسیار داشته باشند ؛ آنرا که ازهمه بزرگتر باشد بعم آنها میگویند.

۵۸ - اگر بین دوعدد ، عدد کوچکتر بزرگتر را عاد کند خود آن بعم دو عدد مفروض خواهد بود .

۵۹ - بعم دو عدد بعم عدد کوچکتر و باقیمانده تقسیم عدد بزرگتر بر کوچکتر نیز میباشد .

۶۰ - برای تعیین بعم‌دو عدد عدد بزرگتر را بر کوچکتر تقسیم میکنیم و عدد کوچکتر را بر باقیمانده تقسیم اول و باقیمانده تقسیم اول‌را بر باقیمانده‌تقسیم دوم قسمت میکنیم و عمل‌را بهمین وضع ادامه‌میدهیم تا وقتی که عمل تقسیم باقیمانده نداشته باشد . آخرین مقسوم علیه بعم دو عدد مفروض است .

| | ۵ | ۷ | ۸ |
|---|---|---|---|
| ۱۷۵۸ | ۳۴۲ | ۴۸ | ۶ |
| ۴۸ | ۶ | | |

۶۱ - برای تعیین بعم چند عدد نخست بین دوتای آنها بعم معین میکنیم ، سپس بین این بعم و عدد سوم بعم بدست میاوریم ، آنگاه بین بعم جدید و عدد چهارم . . . و بهمین نحو عمل را ادامه میدهیم تا همه اعداد منظور شوند . آخرین بعم بعم کلیه اعداد است .

۶۲ - ممکنست بعم چند عدد را از راه تجزیه آنها بعوامل اول بدست آورد . برای اینکار پس از تجزیه آن اعداد عوامل اول مشترک آنها با کوچکترین نما رادرهم ضرب میکنیم .

$$۱۷۵۸ = ۲ \times ۳ \times ۲۹۳$$

$$۳۴۲ = ۲ \times ۳^{۲} \times ۱۹$$

بعمم آنها $= ۲ \times ۳$

۶۳ - اگر دو عدد در عددی ضرب (یا بر عددی تقسیم) شوند بعم آنها نیز چنین خواهد شد .

## XI - کوچکترین مضرب مشترک

علامت اختصاری آن کمم

۶۴ـ دو یا چند عدد مضربهای مشترك بیشمار دارند. آنرا که ازهمه کوچکتر باشد کمم آنهامیگویند.

۶۵ ـ کمم چند عدد که نسبت بهم اول باشند حاصلضرب آنهاست.

۶۶ ـ اگر دو عدد درعددی ضرب (یا بر عددی تقسیم) شوند کمم آنها نیز چنین خواهد شد.

۶۷ ـ کمم بین دوعدد عبارتست ازخارج قسمت تقسیم حاصل ضرب آن دو عدد بر بعم آنها.

۶۸ ـ کمم بین چند عدد باینطریق بدست میآید که اول بین دوتای آنها کمم تعیین نموده و بعد بین این کمم و عدد سوم کمم تعیین میکنیم و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا کمم بین تمام آن اعداد بدست آید.

۶۹ ـ کوچکترین مضرب مشترك اعدادی که بعوامل اول تجزیه شده اند عبارتست از حاصل ضرب عوامل اول مشترك و غیرمشترك آنها که دارای بزرگترین نما باشند.

## XII - برخه یا کسر

۷۰ ـ هرگاه یکه (واحد) را به $n$ قسمت مساوی کنیم و $m$ قسمت از آنرا اختیار نمائیم گوئیم برخه‌ای یا کسری از واحد مساوی $\frac{m}{n}$ آن رااختیار کرده‌ایم.

$n$ را برخه نام یامخرج و $m$ را برخه‌شماریا صووت گویند.

هرگاه $n$ قوه‌ای از ۱۰ باشد برخه رادهدهی یا

اعشاری و گرنه آنرا **متعارفی** میگویند.

اگر $m$ از $n$ بزرگتر باشد $\frac{m}{n}$ را **برخه نما** مینامند.

چنانچه با برخه عدد صحیحی همراه باشد یك **عدد برخگی** خواهیم داشت، مانند $2\frac{3}{5}$

$m$ و $n$ ممکنست عدد صحیح یا کسر باشند.

۷۱ - **نسبت دو طول** - هرگاه برای اندازه گرفتن دوطول $l$ و $l'$ واحدمشترکی بکار رود و $l$ شامل $m$ مرتبه و $l'$ شامل $n$ مرتبه‌واحد مشترك باشد نسبت دو طول $l$ و $l'$ عبارتست از برخه $\frac{m}{n}$.

## خواص عمومی

۷۲ - حاصل ضرب طولی مانند $l$ در عدد $n$ عبارتست از حاصل جمع $n$ طول مساوی $l$.

۷۳ - حاصل ضرب طولی مانند $l$ در $\frac{1}{n}$ یعنی عکس $n$ عبارتست از طول حاصل از تقسیم $l$ به $n$ قسمت مساوی.

۷۴ - حاصل ضرب طولی مانند $l$ در کسر $\frac{m}{n}$ عبارتست از $\frac{m}{n}$ طول $l$، یعنی برای بدست آوردن این حاصل ضرب باید $l$ را در $m$ ضرب وحاصل را بر $n$ تقسیم نمود یا $l$ را بر $n$ تقسیم وخارج قسمت را در $m$ ضرب کرد.

۷۵ - هرگاه دوجمله کسری (صورت و مخرج) را در

یك عدد (یا بریك عدد) ضرب (یا تقسیم) کنیم حاصل کسری است مساوی کسر مفروض.

۷٦ - هرگاه صورت کسری را در عددی ضرب نمائیم کسر در آن عدد ضرب میشود.

۷۷ - هرگاه مخرج کسری وا در عددی ضرب نمائیم کسر بر آن عدد تقسیم میشوذ.

۷۸ - هرگاه صورت کسری را بر عددی تقسیم نمائیم کسر بر آن عدد تقسیم میشود.

۷۹ - هرگاه مخرج کسری‌را بر عددی تقسیم نمائیم کسر در آن عدد ضرب میشود.

۸۰ - برای اینکه دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند لازم و کافیست که $ad = bc$ باشد.

۸۱ - کسری رامیگویند **بساده‌ترین صورت** درآمده یا **غیر ممکن التحویل** شده است که صورت ومخرجش عاد مشترکی نداشته باشند یعنی نسبت بهم اول باشند.

۸۲ - چند کسر را میگویند **مخرج مشترك** دارند که مخرجهای همه یکی باشد.

۸۳ - برای تحویل چند کسر بکوچکترین مخرج مشترك باید:

۱ - هر کسر را بساده ترین صورت در آورد،

۲ - سپس بین مخرجها کمم تعیین کرد،

۳. کمم را بر مخرج هر کسر تقسیم وخارج قسمت‌را در دو عامل کسر ضرب نمود.

**تبصره** - هر گاه در قسمت ۲ بجای کمم مخرجها یك مضرب مشترك آنهارا بدست آوریم کسرها بیك مخرج تحویل خواهند شد نه بکوچکترین مخرج مشترك .

## جمع و تفریق برخه‌ها

۸۴ - مجموع یاتفاضل چند کسر که یك برخه نام (مخرج) داشته باشند کسریست که صورتش مجموع یا تفاضل صورتها و مخرجش مخرج مشترك کسرهای مفروض باشند .

**تبصره** - اگر کسرها یك مخرج نداشته باشند نخست آنها را بیك مخرج تحویل میکنیم .

## ضرب برخه‌ها

۸۵ - حاصلضرب دویا چند کسر کسریست که صورتش حاصلضرب صورتها و مخرجش حاصلضرب مخرجها باشد .

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

## تقسیم کسرها

۸۶- برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر کسر مقسوم علیه را معکوس نموده بین آنها عمل ضرب بجا میآوریم :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

۸۷ - هر عدد صحیح را میتوان کسری دانست که مخرجش ۱ باشد . با این فرض قواعد راجع باعمال اصلی در کسرها را میتوان در اعداد صحیح نیز جاری دانست .

## برخه‌های دهدهی

۸۸ - مجموع و تفاضل عددهای دهدهی ممکنست عدد صحیح یا دهدهی باشد.

۸۹- حاصلضرب دوعدد دهدهی همیشه عددیست دهدهی

۹۰ - خارج تقسیم دو عدد دهدهی ممکنست عددی صحیح یا کسر دهدهی یا کسر متعارفی باشد.

## تبدیل کسر دهدهی بمتعارفی و بعکس

۹۱ - هر کسر دهدهی‌را میتوان بصورت کسر متعارفی نوشت : $\frac{٢٣}{٤٠} = \frac{٥٧٥}{١٠٠٠} = ٠٫٥٧٥$

۹۲ - هر کسر متعارفی را میتوان بوسیله تقسیم کردن صورت بر مخرج بصورت کسر دهدهی درآورد :

$$\frac{٢٣}{٢٥} = ٠٫٩٢$$

کسر متعارفی را **مولد** کسر دهدهی میگویند

۹۳ - اگر مخرج کسر متعارفی فقط مضرب قوای مختلف ۲ و ۵ باشد تقسیم صورت بر مخرج بطور صحیح انجام میگیرد یعنی بالاخره باقیماندهٔ تقسیم صفر میشود. اما اگر مخرج شامل عواملی غیر از ۲ و ۵ باشد باقیمانده تقسیم، هر قدرهم عمل را ادامه دهیم، هیچگاه صفر نمیگردد و چون بعد از یك یا چند عمل باقیمانده ای برابر یکی از باقیمانده‌های سابق بدست خواهد آمد یك عده ارقام مرتباً درخارج قسمت تکرار خواهند شد. چنین برخه‌ای **را برخهٔ دوری** یا **کسر متناوب** گویند.

مثال ۱ : .... $۰/۶۶۶ = \frac{۲}{۳}$

۲ ... $۰/۷۱۴۲۸۵\ ۷۱۴۲۸۵ = \frac{۵}{۷}$

در برخه دوری پیکرهائی را که تکرار میشوند **دوره گردش** نامند در مثال ۱ دوره گردش ۶ و در مثال ۲ ۷۱۴۲۸۵ است.

۹۴ - برخه دوری را **ساده** گویند اگر دوره گردش بی‌فاصله بعد از ممیز شروع شود (مثالهای بالا) و مرکب خوانند اگر بین ممیز و دوره گردش یك **دوره‌غیرگردش** یعنی عددی باشد که تکرار نشود.

مثال .... $۰/۳۵۷۱۴۲۸\ ۵۷۱۴۲۸ = \frac{۵}{۱۴}$

۹۵ - برای نوشتن بعد از ممیز دوره غیر گردش و بعد دورهٔ گردش را یك بار نوشته پس از آن چند نقطه میگذاریم

۹۶ - برخه متعارفی وقتی ببرخه دوری ساده قابل‌تبدیل است که در مخرجش هیچ عامل ۲ و ۵ نباشد و وقتی که در مخرجش عامل ۲ یا ۵ و عوامل دیگر باشند ببرخه دوری مرکب تبدیل میگردد.

۹۷ - کسر مولد کسر اعشاری دوره‌ساده کسری است که صورتش یك‌دوره گردش و مخرجش بعده دوره گردش ۹ باشد.

۹۸ - صورت کسر مولد کسر اعشاری متناوب مرکب بدین‌طریق بدست میآید که دوره‌غیر گردش را نوشته ودنبال آن یك دوره گردش را بنویسیم بعد از این عدد که حاصل میشود عدد حاصل از دوره غیر گردش را کم کنیم این

تفاضل صورت کسر مولد است مخرج کسر مولد کسر اعشاری متناوب مرکب بدینطریق بدست میآید که بعدهٔ دوره گردش ۹ نوشته و بعدهٔ دورهٔ غیر گردش صفر در جلوی آن بگذاریم

## XIII نسبت و تناسب :

۹۹ - نسبت دو عدد a و b عبارتست از خارج قسمت $\frac{a}{b}$ .

اعداد a و b میتوانند صحیح یا کسری باشند .

۱۰۰ - تساوی دو نسبت را یك تناسب گویند مانند

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

تناسب مذکور را میتوان بصور زیر نوشت :

۱ - $a \cdot d = c \cdot b$

۲ - $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ و $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ و $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ و $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b} \quad \frac{b}{d}=\frac{a}{c} \quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$$

۳ - $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \quad \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

۴ - $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ .

۱۰۱ - از چند نسبت مساوی .... $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$

روابط زیر نیز نتیجه میشود :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\frac{\pm a\pm b\pm c\pm d}{\pm a'\pm b'\pm c'\pm d'}$$

۱۰۲ ـ اگر چند نسبت نامساوی $\frac{a}{a'}$, و $\frac{c}{c'}$ و $\frac{d}{d'}$ و, $\frac{b}{b'}$ دردست باشند نسبت $\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'}$ محصور است بین بزرگترین و کوچکترین کسور مفروض .

۱۰۳ ـ اگر بصورت و مخرج کسر کوچکتر از واحد $\frac{a}{b}$ یك عدد c بیفزائیم کسر بزرگتر میشود ولی باز از ۱ کوچکتر است یعنی هرگاه $1>\frac{a}{b}$ باشد $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

۱۰٤ ـ ولی هرگاه $\frac{a}{b}>1$

$$\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}$$

۱۰۵ ـ واسطه عددی A بین دو عدد a و b عبارتست از:

$$A=\frac{a+b}{2}$$

همچنین واسطه عددی A بین n عدد a و b و C و ... و l عبارتست از :

$$A=\frac{a+b+c+\ldots+l}{n}$$

۱۰۶- واسطه هندسی G بین دو عدد a و b عبارتست از:

$$G=\sqrt{a \cdot b}$$

همچنین واسطه هندسی G بین n عدد a و b و c و ... و l عبارتست از:

$$G=\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \dots l}$$

۱۰۷- واسطه عددی A بین n عدد a و b و c و ... و l از واسطه هندسی G آنها بزرگتر است.

# XIV - مقیاسها

## ۱ - دستگاه متری

۱۰۸ - در این دستگاه یکهٔ اصلی، واحد طول میباشد و سایر یکه‌ها از آن مشتق میشوند.

### ۱۰۹ : طول

**واحد** : متر = تقریباً $\frac{۱}{۴۰۰۰۰۰۰۰}$ نصف النهار زمین = متر نمونهٔ بین المللی

**اضعاف** : دکامتر = ۱۰ متر ، هکتومتر = ۱۰۰ متر
کیلومتر = ۱۰۰۰ متر

**اجزاء** : دسیمتر = ۰/۱ متر ، سانتیمتر = ۰/۰۱ متر
میلیمتر = ۰/۰۰۱ متر

### ۱۱۰ : سطح

**واحد : متر مربع**

**اضعاف** : دکامتر مربع = ۱۰۰ ، هکتومتر مربع = ۱۰۰۰۰
کیلومتر مربع = ۱ ۰۰۰ ۰۰۰ متر مربع

**اجزاء :** دسیمتر مربع = ۰/۰۱ ، سانتیمتر مربع = ۰/۰۰۰۱ ، کیلومتر مربع = ۰/۰۰۰۰۰۱ متر مربع

**واحد اراضی زراعتی :** آر = دکامتر مربع

**اضعاف :** هکتار = ۱۰۰ آر = هکتو متر مربع

**اجزاء :** سانتی آر = ۰/۰۱ آر = متر مربع

**تبصره :** در مقیاس سطح اضعاف و اجزاء صد بصد بزرك و کوچك میشوند .

**۱۱۱ ـ حجم**

**واحد :** متر مکعب

**اضعاف :** متداول نیستند

**اجزاء :** دسیمتر مکعب = ۰/۰۰۱ ، سانتیمتر مکعب = ۰/۰۰۰۰۰۱ ، میلیمتر مکعب = ۰/۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۱ متر مکعب .

**تبصره :** در مقیاس حجم اضعاف و اجزاء هزار بهزار بزرك و کوچك میشوند .

**۱۱۲ ـ پیمانه**

**واحد :** لیتر = يك دسیمتر مکعب

**اضعاف :** دکالیتر = ۱۰ ، هکتولیتر = ۱۰۰ ، کیلو لیتر = ۱۰۰۰ لیتر

**اجزاء :** دسیلیتر = ۰/۱ ، سانتیلیتر = ۰/۰۱ ، میلیلیتر = ۰/۰۰۱ لیتر

**۱۱۳ ـ وزن :**

**واحد :** گرم = وزن يك سانتیمتر مکعب آب مقطر ٤ درجه حرارت

**اضعاف :** دکاگرم = ۱۰ ، هکتوگرم = ۱۰۰، کیلو گرم = ۱۰۰۰ گرم .

کنتال = ۱۰۰ کیلوگرم ، تن = ۱۰۰۰ کیلوگرم

**اجزاء :** دسی گرم : ۰/۱ سانتیگرم = ۰/۰۱،میلی گرم = ۰/۰۰۱ گرم

**برای جواهرات** : قیراط = ۲۰ سانتیگرم

### بستگی بین وزن و حجم

۱ گرم معادلست با وزن یك سانتیمتر مکعب آب مقطر ٤ درجه

۱ کیلوگرم « « یك دسیمتر « « «

۱ تن « « یك متر « « «

گرم و سانتیمتر مکعب ، کیلوگرم و دسیمتر مکعب ، تن و متر مکعب را یکه‌های متناظر گویند

**۱۱۵ - وزن مخصوص** یك جسم عبارتست از وزن یکهٔ حجم. در صورتیکه وزن با یکهٔ متناظر آن بیان شود.

### وزن مخصوص برخی اجسام مهم :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | چوب پنبه | ۰/۲٤ | ۸ | آلومینیم | ۲/٦ |
| ۲ | چوب | ۰/٦۹-۱/۰۳ | ۹ | آنتیموان | ٦/۸ |
| ۳ | بنزین | ۰/٦۹-۰/۷۱ | ۱۰ | روی | ۷/۲ |
| ٤ | نفط | ۰/۷٦ | ۱۱ | چدن | ۷/۱-۷/۳ |
| ٥ | الکل | ۰/۸۱ | ۱۲ | قلع | ۷/۲ |
| ٦ | یخ | ۰/۸۸-۰/۹۲ | ۱۳ | آهن | ۷/۸٥ |
| ۷ | آب | ۱/- | ۱٤ | فولاد نرم | ۷/۸٦ |

۱۵ مازوت ۰/۹-۱/۱
۱۶ اسفالت ۱/۱-۱/۵
۱۷ ذغال سنك ۱/۲-۱/۵
۱۸ كك ۱/۴
۱۹ آجر ۱/۴-۱/۶
۲۰ خاك رس ۱/۶-۲/-
۲۱ بتن ۱/۸-۲/۴۵
۲۲ سیمان ۱/۹
۲۳ شیشه ۲/۴-۲/۶
۲۴ سنك ۲/۵-۳/۰۸
۲۵ مفرغ ۸/۴-۸/۷
۲۶ نیکل ۸/۸۵
۲۷ مس ۸/۹
۲۸ نقره ۱۰/۵
۲۹ سرب ۱۱/۳
۳۰ جیوه ۱۳/۶
۳۱ طلا ۱۹/۳۲
۳۲ پلاتین ۲۱/۲

## ۱۱۶ - پول:

| شماره ترتیب | مشخصات | عیار | وزن بگرم: غیر خالص | وزن بگرم: خالص |
|---|---|---|---|---|
| | **طلا** | | | |
| ۱ | یك پهلوی | ۹۰۰ در ۱۰۰۰ | ۸٫۱۳۵۹۸ | ۷٬۳۲۲۳۸۴ |
| ۲ | نیم پهلوی | ۹۰۰ در ۱۰۰۰ | ۴٬۰۶۷۹۹ | ۳٬۶۶۱۱۹۱ |
| | **پشیز** | | | |
| | نقره | | | |
| ۳ | ده ریال | ۶۰۰ در ۱۰۰۰ | ۱۶٬- | ۹٬۶۰ |
| ۴ | پنج ریال | ۶۰۰ در ۱۰۰۰ | ۸٬- | ۴٬۸۰ |
| ۵ | دو ریال | ۶۰۰ در ۱۰۰۰ | ۳٬۲۰ | ۱٬۹۲ |
| ۶ | یك ریال | ۶۰۰ در ۱۰۰۰ | ۱٬۶۰ | ۱٬۹۶ |
| | برنز آلومینیوم | | | |
| ۷ | پنجاه دینار | ۹۱ر۵ درصد مس | ۳٬۴۹ | — |
| ۸ | ده » | ۹۱ر۵ درصد مس | ۲٬۶۸ | — |
| ۹ | پنج » | ۸ر۵ درصد آلومینیوم | ۱٬۶۵ | — |
| | **مس** | | | |
| ۱۰ | پنجاه دینار | — | ۳٬۴۹ | — |

## ۱۱۷ مقیاسهای سابق

**طول:** واحد : زرع

اضعاف : فرسنك = ۶۰۰۰ ذرع

اجزاء : چارك = $\frac{۱}{۴}$ زرع ، گره = $\frac{۱}{۱۶}$ زرع، بهر = $\frac{۱}{۳۲}$ زرع

**وزن:** واحد : من

اضعاف : ری = ۴ من ، خروار = ۱۰۰ من

اجزاء : چارك = $\frac{۱}{۴}$ من ، سیر = $\frac{۱}{۴۰}$ من

مثقال = $\frac{۱}{۱۶}$ سیر : نخود = $\frac{۱}{۲۴}$ مثقال : گندم = $\frac{۱}{۴}$ نخود

## ۱۱۸ ـ رابطه بین مقیاسهای فعلی و قدیم

زرع = ۱/۰۴ متر

| گندم | نخود | مثقال | سیر | من | خروار |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۴۸ گرم | ۵ | | | | |
| ۷۵ گرم | | | ۱ | | |
| ۷۵۰ گرم | | | ۱۰ | | |
| یك کیلو گرم | ۸ | ۵ | ۱۳ | | |
| سه « | | | | ۱ | |
| سیصد « | | | | | ۱ |
| یك تن | ۸ | ۵ | ۱۳ | ۳۳ | ۳ |

گندم = ۰/۰۴۸۸۲۸۱ گرم سیر = ۷۵ گرم
نخود = ۰/۱۹۵۳۱۲۵ « من = ۳ کیلوگرم
مثقال = ٤/٦٨٧٥ « خروار = ۳۰۰ «

## ۱۱۹ - زمان

**واحد**: روز = مدت حرکت وضعی زمین

**اجزاء**: ساعت = $\frac{۱}{۲٤}$ روز دقیقه = $\frac{۱}{٦۰}$ ساعت ثانیه = $\frac{۱}{٦۰}$ دقیقه

**اضعاف**: هفته = ۷ روز ماه = ۲۹ ، ۳۰ یا ۳۱ روز
سال شمسی = ۳٦۵ روز یا ۳٦٦ روز (درسال کبیسه)
سال قمری = ۳۵٤ یا ۳۵۵ روز ( « )
قرن = صد سال

**سال شمسی ایرانی** : شروع: اول فروردین مصادف با عبور کره زمین از نقطه اعتدال ربیعی و روز اول بهار

**سال شمسی ایرانی**: ۱۲ ماه دارد از فروردین تا شهریور ۳۱ روز ، از مهر تا بهمن ۳۰ روز اسفند در سال عادی ۲۹ و در سال کبیسه ۳۰ روز

**سال قمری عربی** : ۱۲ ماه دارد که متناوباً ۳۰ و ۲۹ روز دارند : ( محرم ، صفر ، ... )

**سال شمسی میلادی**: شروع اول ژانویه مساوی ۱۱ دی ماهها ژانویه (۳۱) فوریه (۳۰ یا ۲۹) مارس (۳۱) آوریل (۳۰) مه (۳۱) ژون (۳۰) ژویه (۳۱) اوت (۳۱) سپتامبر (۳۰) اکتبر (۳۱) نوامبر (۳۰) دسامبر (۳۱)

**تعدیل** : در تقویم فرنگی سالهائی که عددشان به ٤ قابل قسمت باشد کبیسه‌اند جز آنها که بدو صفر ختم میشوند

که در اینصورت اگر عدد سال صرف نظر از صفر ها به ٤ قابل قسمت باشد سال کبیسه است و الا ساده.

در تقویم ایرانی در هر دوره ۳۳ ساله سالهای ٤ و ۸ و ۱۲ و ۱٦ و ۲۰ و ۲٤ و ۲۸ و ۳۳ کبیسه است و سایر سالها ساده

مطابقت تاریخها:

اول فروردین ۱۳۲٦ شمسی هجری درسال ۱۹٤۷ میلادی و ۱۳٦٦ هجری قمری واقع میشود.

## XV ـ اعداد مرکب

۱۲۰ ـ **تعریف**: مقیاساتی را که با اجزاء و اضعاف بستگی دهدهی ندارند **اعداد مرکب** گویند. مانند ساعت و دقیقه و ثانیه یادرجه دقیقه ثانیه یا اندازه های سابق ایران،

۱۲۱ ـ در اعمال حسابی مربوط باعداد مرکب همیشه تبدیل یکه‌ها بیکه‌های بالا تر یا پائین تر لازم میآید و این کار بوسیله ضرب و تقسیم صورت میگیرد.

۱۲۲ ـ **افزایش** ـ در جمع اعداد مرکب بایستی یکه‌های هم نوع را زیرهم نوشت و جمع کرد و بمجرداینکه مجموع معادل یا بزرگتر از یکهٔ بالاتر باشد آن را ازجنس آن یکه کرد.

۱۲۳ **کاهش** ـ اگر اعداد نمایندهٔ یکه های مختلف در کاهشیاب بزرگتر از اعدادنظیر خوددر کاسته‌باشند عمل بسهولت انجام پذیر است.

هرگاه یکی از اعداد نماینده یکه های مختلف در کاهشیاب کوچکتر از عدد نظیر خود در کاسته باشد باید در کاهشیاب یك یکهٔ مرتبه بعد را از جنس یکهٔ مرتبه پائین کرد و بآن افزود آنگاه عمل کاهش را بجا آورد.

۱۲۴ **ضرب** - برای ضرب اعداد مرکب در یك عدد آن عدد را در هریك از اعداد نماینده یکه‌های مختلف ضرب نموده در حاصل ضرب یکه‌ها را درصورت احتیاج بیکهٔ بالاتر تبدیل میکنیم.

۱۲۵ **تقسیم** - برای تقسیم اعداد مرکب بر یك عدد، ابتدا از عدد نمایندهٔ بزرگترین یکه شروع کرده عمل تقسیم را بجا می آوریم بهر را نوشته باقیمانده را از جنس یکه مرتبه پائین کرده برعدد نمایندهٔ همان یکه در بخشی افزوده در مجموع عمل تقسیم را انجام میدهیم، باقیمانده جدید را از جنس یکهٔ مرتبهٔ کوچکتر کرده و عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا تقسیم به پایان رسد.

## XVI اربعه متناسبه

۱۲۶ **تعریف** - مراد از اربعهٔ متناسبه یا بطور مختصر **تناسب** قواعدی است که بمدد آن مسائلی حل میشود که در آنها کمیتی **نسبت مستقیم یا معکوس** با چند کمیت دیگر داشته باشد و از آن کمیت یك مقدار معلوم در دست بوده و بمدد نسبت‌های مفروض بایدیك مقدار مجهول آنرا بدست آورد

۱۲۷ - هر گاه تعداد عوامل معلوم و مجهول از ٤

تجاوز نکند تناسب **مفرد** و اگر عدد آنها بیش از ٤ باشد تناسب را **مرکب** گویند .

۱۲۸ - هر گاه در تناسب ، نسبت بین کمیات مستقیم باشد تناسب را **مستقیم** و الا **معکوس** گویند .

۱۲۹ **قاعده** - برای حل تناسب مفرد مستقیم مقدار همجنس کمیت مجهول را در نسبت معکوس دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم

۱۳۰ - **قاعده** - برای حل تناسب مفرد معکوس مقدار هم جنس کمیت مجهول را در نسبت مستقم دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم .

۱۳۱ **قاعده** - برای حل مسائل تناسب مرکب کمیتی را که یك مقدار آن مجهول است پی در پی با هر دو مقدار همجنس از کمیات دیگر می سنجیم و بمورد نسبت مستقیم یا نسبت معکوس دو بدو آن مقادیر را تشکیل داده مقدار همجنس مجهول را در حاصلضرب کلیه نسبتها ضرب می کنیم تا مقدار مطلوب بدست آید

## XVII - آمیزه و آلیاژ

۱۳۲ - هر گاه چند نوع از کالائی را که بهای آن مختلف باشد با هم **بیامیزیم** کالای آمیخته دارای بهای خاصی است که «**بهای متوسط**» یا **نرخ متوسط** نامیده میشود . مقداری را که از هر نوع کالای مفروض برداشته ایم **نسبت آمیزش** گویند

مسائل آمیزه بر دو نوعند : ۱ - نسبت آمیزش معلوم است ، باید بهای متوسط را یافت . ۲ - بهای متوسط معلوم است ، باید نسبت آمیزش را بدست آورد .

۱۳۳ - در مسائل نوع اول برای بدست آوردن نرخ متوسط قیمت کلیه مقداری را که از هر جنس برداشته میشود حساب نموده حاصل جمع قیمتها را بر مجموع مقدار کالا تقسیم مینمائیم

۱۳۴ - وقتی نرخ اجناس و نرخ متوسط در دست باشد برای بدست آوردن نسبتی که از هر جنس باید برداشت باینطریق عمل میکنیم : میزان سود یا زیان حاصل از هر نوع جنس را تعیین نموده سودها را با هم و زیانها را با هم جمع می کنیم بعد به نسبت مجموع زیانها از اجناس سود بخش و به نسبت مجموع سودها از جنس های زیان بخش برداشته باهم مخلوط میکنیم .

۱۳۵ **آلیاژ** - جسمی است که از ذوب چند فلز با یکدیگر بدست آید . هر گاه از یك فلز گرانبها مانند زر یا نقره با فلز دیگری چون مس آلیاژی ترکیب کنیم مقدار فلز قیمتی را که در هر هزار جزء آلیاژ وجود دارد **عیار** آن نامند

۱۳۶ - برای بدست آوردن وزن فلز قیمتی در یك آلیاژ کافی است وزن آلیاژ را در عیار آن ضرب کرد .

۱۳۷ - مسائل آلیاژ مانند مسائل آمیزه حل میشوند .

## XVIII مرابحه مفرد (بهره کاری)

۱۳۸ - معمولا هر کس پولی بوام بگیرد برای آن کرایه‌ای قائل میشود که **بهره** یا **ربح** نام دارد .

۱۳۹ - بهره نسبت مستقیم با سرمایه ، با مدتی که سرمایه در مرابحه بوده است و با نرخ دارد . نرخ یعنی میزان

اجاره واحدیکه درزمان معینی برای سرمایه‌معینی قایل‌میشوند

نرخ فرنگی یا در صد یعنی سود ۱۰۰ ریال در یکسال

نرخ ایرانی یعنی سود ۱۰ ریال در یك ماه

۱۴۰ - برای تبدیل نرخ ایرانی بنرخ در صد کافیست آنرا برحسب شاهی (۵ دینار) بیان نمود و در ۶ ضرب کرد

مثال : نرخ تومانی (ده‌ریال) چهارشاهی در ماه برابر است با ۶×۴ یعنی ۲۴٪ در سال.

۱۴۱ - اگر سرمایه را س ، مدت رام ، نرخ ران و بهره را ب بنامیم و مدت را برحسب سال بیان کنیم :

$$\text{ب} = \frac{\text{ن}\times\text{م}\times\text{س}}{۱۰۰} \qquad \text{س} = \frac{\text{ب}\times ۱۰۰}{\text{ن}\times\text{م}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{ب}\times ۱۰۰}{\text{ن}\times\text{س}} \qquad \text{ن} = \frac{\text{ب}\times ۱۰۰}{\text{م}\times\text{س}}$$

**تبصره** - در مسائل بهره کاری یك سال ۳۶۰ و ماه ۳۰ روز حساب میشود.

۱۴۲ — در مرابحه مفرد سرمایه ثابت است یعنی سود سالیانهٔ آن بآن افزوده نمی شود.

در نوع دیگری از مرابحه در آخر سال سود سالیانه را بسرمایه اضافه میکنند. آنرا مرابحه یا ( بهره کاری ) مرکب گویند ( رجوع شود بقسمت جبر )

## XIX تنزیل

۱۴۳ - در بازرگانی اغلب بجای پول نقد باشخاص سندی داده میشود که در تاریخ معینی قابل پرداخت است و اگر دارندهٔ

آن سند بخواهد زود تر از آن تاریخ که بسر رسید موسومست سند را بپول تبدیل کند باید مبلغی بنام تنزیل کسر کند و بقیه را دریافت دارد . مبلغی را که در سند بازرگانی نوشته شده **ارزش اسمی** و مبلغی که بعد از کسر تنزیل پرداخته میشود **ارزش فعلی** آن است •

۱۴۴ - تنزیل با ارزش اسمی و مدت و نرخ تنزیل نسبت مستقیم دارد و مسائل آن عینا مانند مرابحه حل میشود •

۱۴۵ - اگر تنزیل از ارزش اسمی سند کسر شود **تنزیل بیرونی** و اگر از ارزش فعلی کسر شود **تنزیل درونی** نامیده میشود

۱۴۶ - تنزیل درونی عادلانه تر است ولی متداول نیست

$$\text{تنزیل درونی} = \text{س} - \frac{۱۰۰ \times \text{س}}{\frac{\text{ن} \times \text{م}}{۳۶۰} + ۱۰۰}$$

## XX جذر

۱۴۷ - **تعریف جذر** - جذر یا ریشه دوم هر عدد A عددیست a که $a^۲ \geqq A < (a+۱)^۲$

۱۴۸ - برای استخراج جذر اعدادی بین ۱ و ۱۰۰ در نظر داشتن جذر اعداد یک پیکری که عبارتند از:

| جذر | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مجذور | ۱ | ۴ | ۹ | ۱۶ | ۲۵ | ۳۶ | ۴۹ | ۶۴ | ۸۱ | ۱۰۰ |

لازم است جذر اعدادی که بین دو عدد پیاپی از سطر دوم قرار دارند بین دو عدد نظیرشان از سطر اول میباشد و جذر

تقریبی آنها تا یك یکهٔ تقریب بآسانی بدست میآید .

۱۴۹ - برای استخراج جذر اعداد از ۱۰۰ ببالا تا یك یکهٔ تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات دو رقمی تقسیم میکنیم جذر قطعه اول سمت چپ را تعیین مینمائیم و مجذور آنرا از همان قطعه اول سمت چپ کم میکنیم و قطعه دوم را درسمت راست این باقیمانده پائین میآوریم و یك رقم از سمت راست عدد حاصل جدا نموده جزء سمت چپ را بر دو برابر رقم جذر اولین قطعه سمت چپ تقسیم میکنیم خارج قسمت دومین رقم جذر عدد مفروض یا بزرگتر از آنست . برای امتحان آنرا در سمت راست دو برابر اولین رقم جذر نوشته حاصل را در خود آن عدد ضرب میکنیم و از عددی که از اولین باقیمانده و قطعه دوم تشکیل شده است کم میکنیم ؛ اگر تفریق ممکن شد رقم امتحان شده رقم دوم جذر است و آن را در سمت راست رقم اول جذر مینویسیم والا یك واحد از آن کاسته مجدداً امتحان میکنیم تا وقتی که تفریق ممکن شود آنوقت قطعهٔ دیگر را در سمت راست باقیمانده فرود آورده بطریق بالا عمل میکنیم تا بهمین طریق تمام قطعات بکار روند مثال :

| | | |
|---|---|---|
| ۱۱۷۳۳۸ | ۳۴۲ | |
| ۹ | ۶۴× | ۶۸۲× |
| ۲۷۳ | ۴ | ۲ |
| ۲۵۶ | ۲۵۶ | ۱۳۶۴ |
| ۱۷۳۸ | | |
| ۱۳۶۴ | | |
| ۳۷۴ | | |

عدد ۳۴۲ جذر و ۳۷۴ باقیمانده است

۱۵۰ - برای استخراج جذر اعداد دهدهی تا یك یكهٔ تقریب از جزء دهدهی صرف نظر نموده جذر قسمت درست را تا یك یكه تقریب استخراج میكنیم و جزء دهدهی را به باقیمانده جذر میافزائیم .

مثال :

| | |
|---|---|
| √۷،۹۵ر۷۲،٤ | ۲۸ |
| ۳۹۵ | ٤۸× |
| ۳۸٤ | ۸ |
| ۱۱ر۷۲٤ | ۳۸٤ |

عدد ۲۸ جذر و ۱۱ر۷۲٤ باقیمانده است .

۱۵۱ - برای استخراج جذر یك عدد درست یا دهدهی تا ۱ر۰ یا ۰۱ر۰ یا ... تقریب عدد را از ممیز بطرف راست و چپ بقطعات دو رقمی تقسیم نموده و قطعات سمت راست (بعد از ممیز) را با گذاردن یك یا چند صفر كامل میكنیم بطریقی كه به تعداد رقم‌های دهدهی كه میخواهیم در جذر داشته باشیم بعد از ممیز قطعه دو رقمی باشد؛ مثلا اگر منظور محاسبه جذر تا ۰/۰۰۱ تقریب است باید بعد از ممیز ٦ رقم داشته باشیم . بعد جذر را بقاعده بالا تعیین نموده وقتی در عدد بممیز رسیدیم در جذر نیز ممیز میزنیم و عمل را مانند وقتی كه ممیز نباشد ادامه میدهیم .

مثال - جذر ۴۹۵ تا ۰۱ر۰ تقریب :

| √٤٩،٥ر٠٠،٠٠ | ٢٢ر٢٤ | | |
|---|---|---|---|
| ٤٩٥ | ٤٢× | ٤٤٢× | ٤٤٤٤× |
| ٨٤ | ٢ | ٢ | ٤ |
| ١١٠٠ | ٨٤ | ٨٨٤ | ١٧٧٧٦ |
| ٨٨٤ | | | |
| ٢١٦٠٠ | | | |
| ١٧٧٧٦ | | | |
| ٣٨٢٤ | | | |

عدد ۲۲/۲٤ جذر و ۰/۳۸۲٤ باقیمانده‌است.

**۱۵۲ - امتحان جذر!**

جذری را که استخراج شده‌است مجذور نموده با باقیمانده جمع میکنیم، در صورت صحت باید خود عدد بدست آید.

## XII - کعب

۱۵۳ - کعب یا ریشه سوم عدد A عدد a است بقسمی که

$$a^{3} \leqslant A < (a+1)^{3}$$

۱۵٤ - برای استخراج کعب اعداد واقع بین ۱ و ۱۰۰۰ در نظر داشتن مکعب اعداد یك پیکری که عبارتند از

| کعب | ۱ | ۲ | ۳ | ٤ | ۵ | ٦ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مکعب | ۱ | ۸ | ۲۷ | ٦٤ | ۱۲۵ | ۲۱٦ | ۳٤۳ | ۵۱۲ | ۷۲۹ | ۱۰۰۰ |

لازم است و کعب اعدادی که بین دو عدد پیاپی از سطر دوم قرار دارند بین دوعدد نظیرشان از سطر اول میباشد وکعب تقریبی آنها تا یك یکهٔ تقریب بآسانی بدست میاید.

۱۵۵ - برای استخراج کعب اعداد از ۱۰۰۰ ببالا تا یك بکه تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات سه رقمی تقسیم میکنیم، کعب قطعه اول سمت چپ را تعیین مینمائیم و قطعه دوم را در سمت راست باقیمانده پائین میآوریم، دو رقم از سمت راستش کنار میگذاریم و جزء سمت چپ را بر سه برابر مجذور رقم اول کعب تقسیم میکنیم ، رقم خارج قسمت رقم دوم کعب یاقدری بزرگتر است؛ برای امتحان :

اولا ، سه برابر مربع اولین رقم کعب را در ۱۰۰ ضرب کرده مینویسیم ،

ثانیاً، سه برابر اولین رقم کعب رادر عدد امتحان کردنی و در ۱۰ ضرب کرده مینویسیم،

ثالثاً، عدد امتحان کردنی رامربع کرده مینویسیم واین عدد ها را جمع نموده حاصل جمع را در عدد امتحان کردنی ضرب میکنیم، اگر حاصل از عددی که از اولین باقیمانده و قطعه دوم تشکیل شده قابل تفریق باشد عدد امتحان کردنی همان رقم دوم کعب است والا باید یك واحد از آن کم و امتحان را تکرار کرد و آنقدر امتحان را تجدید نمود تا تفریق ممکن شود؛ بعد این رقم را در سمت راست کعب قطعه دوم نوشته قطعه سوم را پائین میآوریم و بهمین طریق عمل را تکرار میکنیم تا تمام قطعات بکار روند .

مثال :

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{۳۲۴۷۱۳۲۴}$ | ۳۱۹ | |
| ۲۷ | $۳ \times ۳^۲ = ۲۷$ | $۳ \times ۳۱^۲ = ۲۸۸۳$ |
| ۵۴۷۱ | $۳ \times ۳^۲ \times ۱۰۰ = ۲۷۰۰$ | $۳ \times ۳۱^۲ \times ۱۰۰ = ۲۸۸۳۰۰$ |
| ۲۷۹۱ | $۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱۰ = ۱۸۰$ | $۳ \times ۳۱ \times ۹ \times ۱۰ = ۸۳۷۰$ |
| ۲۶۸۰۳۲۴ | $۲^۲ = ۴$ | $۹^۲ = ۸۱$ |
| ۲۶۷۰۷۵۹ | ۲۸۸۴ | ۲۹۶۷۵۱ |
| ۰۰۰۹۵۶۵ | ۲ | ۹ |
| | ۵۷۶۸ قابل قبول نیست | ۲۶۷ ۷۵۹ |
| | $۳ \times ۳^۲ \times ۱۰۰ = ۲۷۰۰$ | |
| | $۳ \times ۳ \times ۱ \times ۱۰ = ۹۰$ | |
| | $۱^۲ = ۱$ | |
| | ۲۷۹۱ | |
| | ۱ | |
| | ۲۷۹۱ | |

عدد ۳۱۹ کعب و ۹۵۶۵ باقیمانده است.

۱۵۶ - قاعدهٔ استخراج کعب اعداد دهدهی. نظیر همان قاعده ایست که دربارهٔ جذر ذکر شد.

۱۵۷ - استخراج کعب تا ۱ر۰ یا ۰۱ر۰ یا ۰۰۱ر۰ یا ۰۰۰ تقریب شبیه بهمان است که در جذر گفته شد، فقط باید قطعات بعد از ممیز بازاء هر یك رقم دهدهی در کعب سه رقم دهدهی در عدد مفروض باشد.

## XXII - اعداد اصم

۱۵۸ - هرگاه در موقع استخراج ریشه دوم یا ریشه سوم یك عدد، هر قدر عمل را ادامه دهیم باقیمانده مساوی صفر

نشود عدد را **اصم یا گنگ** گویند. اعداد غیر اصم را **منطق یا گویا** نامند.

۱۵۹ - بجای اعداد اصم در محاسبات عددی معمولا مقدار تقریبی آنها را بکار میبرند.

۱۶۰ - در مورد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد اصم مقادیر تقریبی آنها را بکار میبریم؛ بدیهی است که نتیجهٔ تقریبی بدست خواهد آمد.

**۱۶۱ - ضرب و تقسیم ریشه دوم (جذر):**

۱ - حاصل ضرب دو عامل اصم $\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}$ عبارتست از

$$\sqrt{a}.\ \sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

ممکن است حاصل‌ضرب ریشه‌های دوم دو مقدار اصم مقدار منطقی باشد؛ مثلا: $\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$

۲ - حاصل ضرب عدد a در عامل اصم $\sqrt{b}$ عبارتست از

$$a.\sqrt{b}=\sqrt{a^{۲}b}$$

۳ - خارج قسمت دو عامل اصم $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ عبارتست از

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

ممکن است خارج قسمت ریشه‌های دوم دو مقدار اصم مقدار منطقی باشد؛ مثلا:

$$\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۸}}=\sqrt{\frac{۱۸}{۸}}=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}$$

٤ - معمولاً در محاسبات اگر مخرج کسری ریشهٔ دوم عدد اصمی باشد باضرب صورت و مخرج کسر در مخرج کسر مخرج را منطق مینمایند؛ مثلاً :

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a} \quad \text{و} \quad \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-b}=\frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

پایان

# جبر

## I - تعاریف

۱- جبر علمی است که برای تعمیم دستورها و تسهیل حل مسائل بکار میرود.

**۲- حرفها** - درجبر مقادیر معلوم را معمولا با حروف اول الفباء لاتین (a و b و c و ....) و مقادیر مجهول را با حروف آخر (x و y و z و غیره) نمایش میدهند.

**۳- نشانه‌ها**- نشانه‌ها یا علامات برای نشاندادن اعمال یا رابطه‌هائی که باید بین اعداد وحروف برقرار باشد بکار میروند.

علامت $+$ نشانه جمع ، علامت $-$ نشانه تفریق ، علامت $\times$ یا $\cdot$ نشانه ضرب و علامت : یا — نشانه تقسیم‌دو عدد میباشند.

علامت $=$ نشانه مساوی بودن و علامت $\neq$ نشانه اختلاف وعلامت $>$ نشانه بزرگتر یا کوچکتر بودن‌است بطوری که درداخل زاویه عدد بزرگتر و بیرون زاویه عدد کوچکتر نوشته میشودمثلا $a<b$ نشان‌میدهد که a کوچکتر است از b.

و $a \geqslant b$ نشان میدهد که b بزرگتر یا اقلا مساوی a میباشد.وقتی مقادیری با علامت +، یا — یا $\times$ یا : درداخل پرانتز ( ) یا کروشه [ ] یا آکولاد { } قرار داشته

باشند حکم مقدارواحد را پیدامیکنند .

علامت $\sqrt[n]{\quad}$ علامت استخراج ریشه n ام مقدار واقع در زیر $\sqrt{\quad}$ است .

٤ - **یادآوری**- بایدمتذکر بود که درموقع حساب کردن هرعبارتی که‌در آن اعمال جمع وتفریق و ضرب وتقسیم باشد بایداول اعمال ضرب وتقسیم و بعد اعمال جمع وتفریق را انجام داد.

٥ - **عددجبری**- پولی که‌وارد صندوق یك تجارتخانه میشود یا از آن خارج میگردد هر دو پولند ولـی در معنی اختلاف دارند اولی به پول موجود در صندوق اضافه شده و دومی ازآن کسر گردیده است ؛ میگویند جهت پول اول با دوم فرق دارد و برای تمیز دادن آنها ازیکدیگر اولی را با علامت + ( مثبت ) و دومی را با علامت — ( منفی ) نشانه میکنند و این عدد حسابی را که بایکی از دو علامت مذکور ممتاز شده است عدد جبری نامند . عدد جبری ٥ - تلفظ میشود منهای ٥ و ٧ + تلفظ میشود باضافه ٧.

٦ - عدد های حسابی را قدر مطلق عددهای جبـری گویند مثلا در مثال بالا عدد حسابی ٥ قدرمطلق عددجبری ٥ — میباشد .

٧ - دو عدد جبری مساویند وقتی که دارای یك قدر مطلق و یك نشانه باشند .

٨ - دو عدد جبری قرینه اند وقی که دارای یك قدر مطلق ولی نشانه های مختلف باشند.

۹ - **یادآوری** - بعضی مواقع در عمل نشانه + را از جلوی اعداد جبری بر داشته و آنهارا بدون نشانه مینویسند؛ ولی هیچوقت اعداد منفی رابدون نشانه — نمینویسند.

۱۰ - **عبارت جبری** - مجموعه‌ای از حروف و اعدادو علاماتی را که‌در یکرشته محاسبات بکار میروند عبارت جبری می نامند.

۱۱ - عبارت جبری منطق ( گویا ) است وقتی که‌در آن حرفی زیر رادیکال نباشد و در غیر اینصورت اصم است.

۱۲ - عبارت جبری صحیح است وقتی که شامل حرفی در مخرج نباشد و در غیر اینصورت کسری است.

۱۳ - دوعبارت جبری را متعادل گویند وقتی مقدار عددی آنها بازاء تمام مقادیری که بجای حروف بگذاریم مساوی باشند.

۱٤ - تساوی بین دو عبارت عددی و یا دو عبارت جبری متعادل را **اتحاد** گویند و بین آنها این علامت ≡ ( تلفظ میشود متحد است با ) را میگذارند.

۱۵ - اگر تساوی بین دوعبارت جبری فقط وفقط بازاء مقادیر مخصوصی از حروف بر قرار شود آن تساوی را **معادله** گویند.

۱٦ - **یکجمله** - اگر عبارتی جبری از حاصل ضرب اعداد جبری باحروف بدست آمده باشد آن را یکجمله یا منم گویند.

۱۷ - **ضریب** - عامل عددی هر یکجمله را ضریب آن گویند.

۱۸ یکجمله‌های متشابه اختلافشان فقط در ضرایبشان میباشد.

۱۹- چند جمله - مجموع چند یکجمله یك چند جمله یا پلی‌نم را تشکیل میدهند.

## II - جمع اعداد جبری

۲۰ - برای جمع دو عدد متحدالعلامه قدر مطلق آنهارا جمع نموده علامت مشترك را میگذاریم.

۲۱ - برای جمع دو عدد مختلف‌العلامه قدر مطلق آنها را از هم کم نموده علامت عددیرا که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است میگذاریم.

## III - تفریق اعداد جبری

۲۲ - برای کم کردن عدد b از a قرینه b را با a جمع می کنیم.

## IV - ضرب اعداد جبری

۲۳ - حاصلضرب دو عدد متحدالعلامه مثبت و حاصلضرب دو عدد مختلف‌العلامه منفی است.

۲۴ - برای ضرب چند عدد جبری قدر مطلق آنها را ضرب نموده اگر تعداد اعداد منفی زوج باشد جلو حاصلضرب + و اگر فرد باشد − میگذاریم.

## V - تقسیم اعداد جبری

۲۵ - برای تقسیم دو عدد جبری قدر مطلق آنها را تقسیم نموده اگر هر دو متحدالعلامه باشند جلوی خارج قسمت

+ و اگر مختلف‌العلامه باشند — قرار میدهیم.

## VI_قوه ( توان)

۲۶ - برای تعریف قوه m ام رجوع شود بشماره ۲۹ بخش حساب .

۲۷ - قوه m ام هر عدد مثبت همواره مثبت است .

۲۸ - قوه m ام عدد منفی مثبت است اگر m زوج باشد و منفی است اگر m فرد باشد.

**۲۹- ضرب چند قوه** - ا - اگر پایه ها مشترك باشند یکی ازپایه‌ها را نوشته و نماهارا با هم جمع میکنیم :

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

ب - اگر نماها مساوی باشند پایه‌ها را در هم ضرب نموده نمای مشترك را نما قرار میدهیم :

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m = (abc)^m$$

**۳۰ - تقسیم دو قوه** - ا- اگر پایه ها مساوی باشند یکی از پایه‌ها را نوشته نماها را از هم کم میکنیم :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ب - اگر نماها مساوی باشند پایه ها را تقسیم نموده نمای مشترك را نما قرار میدهیم

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

۳۱- یادآوری- هر عدد بقوه صفر مساوی است بایك.

۳۲- قوه کسری - اگر داشته باشیم $\sqrt[q]{a^p}$ آنرا میتوان باینصورت نوشت:

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$

۱ - حاصل ضرب دو قوه کسری یك عدد:

$$a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{pq' + qp'}{qq'}}$$

ب خارج قسمت دو قوه کسری یك عدد

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q'}}} = a^{\frac{pq' - qp'}{q\,q'}}$$

ج- قوه کسری حاصل ضرب چند عدد:

$$(abc)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \times b^{\frac{p}{q}} \times c^{\frac{p}{q}}$$

د - بقوه کسری رساندن قوی کسری یك عدد:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{pp'}{qq'}}$$

۳٤ - قوه منفی:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

۱ - حاصل ضرب دو قوه منفی از یك عدد

$$a^{-m} \times a^{-m'} = a^{-(m + m')} = \frac{1}{a^{m + m'}}$$

ب - خارج قسمت دو قوه منفی از یك عدد:

$$a^{-m} : a^{-m'} = a^{m' - m} = \frac{1}{a^{m - m'}}$$

ج - قوهٔ منفی حاصل ضرب چند عدد

$$(abc)^{-m} = a^{-m} \times b^{-m} \times c^{-m}$$

د - بقوه منفی رساندن قوهٔ منفی یك عدد

$$(a^{-m})^{-m'} = a^{mm'}$$

این روابط برحسب تغییر علامت m و m' متغیر میباشند.

ه - قوهٔ منفی کسری:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{۱}{\sqrt[q]{a^p}}$$

## VII - جمع جمل جبری

۳۴ - برای جمع چند جمله جبری متشابه یکی از آنها را نوشته و ضرائب آنهارا جمع جبری مینمائیم.

۳۵ - برای جمع چند کثیرالجمله ، جمل متشابه را با هم جمع نموده و جمل غیرمتشابه را دنبال آنها مینویسیم.

## VIII - تفریق جمل جبری

۳۶ - برای تفریق دو کثیرالجمله علامت جمل کاسته را تغییر داده و با کاهشیاب جمع جبری مینمائیم .

## IX - ضرب جمل جبری

۳۷ - حاصل ضرب چند یك جمله یك جمله ایست که ضریبش مساوی حاصل ضرب ضرائب آنها بوده شامل تمام حروف آن جمل باشد ، نمای هریك ازحروف مساوی مجموع نما هائیست که آن حرف در هر یکجمله داشته باشد .

۳۸ - برای ضرب یکجمله در یك کثیر الجمله یك - جملهٔ مزبور را در هر یك از جمل کثیر الجمله ضرب مینمائیم وحاصلضربها را با هم جمع جبری میکنیم .

۳۹ - برای ضرب دو کثیر الجمله هر یك از جمل کثیر- الجمله اول را در کثیر الجمله دوم ضرب نموده و حاصل ضربها را باهم جمع جبری میکنیم .

## X - تقسیم جمل جبری

٤٠ - برای تقسیم دو جمله جبری ضرائب آنها را تقسیم جبری نموده اجزاء نظیر هم را برهم تقسیم میکنیم ،مثال :

$$\frac{+۱۲a^{۲}}{۱۵\,ab}=\frac{٤\;\;a}{٥\;\;b}$$

٤١ - برای تقسیم یك کثیر الجمله بر یکجمله اول کثیر الجمله مقسوم را برحسب قوای نزولی مرتب نموده بعد هر یك از جمل را بر یکجمله مقسوم علیه تقسیم مینمائیم و خارج قسمتها را با هم جمع جبری میکنیم. مثال :

$$\frac{۲٤a^{۲}-٦a}{-۲a}=-۱۲a+۳$$

٤۲ - برای تقسیم دو کثیر الجمله آنها را بترتیب قوای نزولی مرتب نموده جمله اول مقسوم رابر اولین جمله مقسوم- علیه تقسیم کرده خارج قسمت را درتمام جمل مقسوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را از مقسوم کم میکنیم تا اولین باقیمانده بدست آید، بعد اولین جمله مانده را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمل مقسوم علیه ضرب مینمائیم و حاصل را از جملههای مانده کم میکنیم تا دومین مانده

بدست آید و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا وقتی که باقیمانده دیگر بر مقسوم علیه قابل قسمت نباشد.

$$
\begin{array}{l|l}
a^3 + 2a^2 b + b^3 & a + b \\
\cline{2-2}
\underline{a^3 + a^2 b} & a^2 + ab - b^2 \\
\quad a^2 b & \\
\quad \underline{a^2 b + ab^2} & \\
\quad -ab^2 + b^3 & \\
\quad \underline{-ab^2 - b^3} & \\
\quad 0 \quad + 2b^3 &
\end{array}
$$

**٤٣ - قابلیت تقسیم کثیر الجمله از x بر $(x \pm a)$**- کثیر الجمله $P(x)$ بر $(x+a)$ وقتی قابل قسمت است که اگر در $P(x)$ بجای x ، a− قرار دهیم حاصل صفر شود یعنی $P(-a) = 0$

مثال:

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2 x + a^3$$

بر $x+a$ قابل قسمت است زیرا چون در آن بجای x مقدار $(-a)$ راقرار دهیم حاصل $a^3 + 3a^3 - 3a^3 + a^3 = 0$ می شود.

همچنین $P(n)$ بر $x-a$ وقتی قابل قسمت است که اگر در آن بجای x مقدار $+a$ بگذاریم حاصل صفر شود.

## x - اتحادهای مهم

**٤٤- تعریف**- اتحاد عبارت ازیك تساوی است که بازای جمیع مقادیری که دردوطرف آن بجای حروف قراردهیم همواره

صحیح باشد. برای ممتاز ساختن اتحادهاازتساویهای معمولی غالباً بین طرفین بجای $=$ علامت $\equiv$ گذاشته میشود .

(۱) $(a+b)^{2} \equiv a^{2}+2ab+b^{2}$

(۲) $(a-b)^{2} \equiv a^{2}-2ab+b^{2}$

(۳) $(a-b)(a+b) \equiv a^{2}-b^{2}$

(٤) $(a+b+c+d)^{2} \equiv a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}+2ab$
$+2ac+2ad+2bc+2dd+2cd$

(٥) $(a+b)^{3} \equiv a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}$

(٦) $(a-b)^{3} \equiv a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$

$(a^{3}+b^{3}) \equiv (a+b)(a^{2}-ab+b^{2})$

$(a^{3}-b^{3}) \equiv (a-b)(a^{2}+ab+b^{2})$

٤٥ رابطه فیثاغورث :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}-\left(\frac{a-b}{2}\right)^{2} \equiv ab$$

٤٦ رابطهٔ اولر :

$$a(c-b)+b(a-c)+c(b-a) \equiv 0$$

٥٢- رابطه استوارت :

$$a^{2}(c-b)+b^{2}(a-c)+c^{2}(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a) \equiv 0$$

٤٧ - بینم ( دو جمله ) نیوتن

$$(a+b)^{n}=a^{n}+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}a^{n-3}b^{3}+\cdots+b^{n}$$

$$+\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-p)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\times p}a^{n-p}a^{p}+\cdots$$

$$\cdots+a^{n}$$

## XII ریشه و ریشکی ها

تعریف - ریشه mام عدد A عددی است مانند a که اگر بقوه mام برسد حاصل مساوی A گردد

$$\sqrt[m]{A}=a \qquad a^{m}=A$$

m را نماینده یاشمار ریشکی گویند.

**۴۹ - ریشه اعداد جبری**

۱) ریشه زوج هرعدد مثبت دوعدد قرینه است،

$$\sqrt[۴]{۶۲۵}=\pm ۵$$

ب) اعداد منفی دارای ریشه زوج نیستند.

ج) علامت ریشه فرد هرعدد باعلامت خود آن یکیست.

۵۰ - ریشه دوم ۱- عددیست موهوم و آنرا مساوی i فرض میکنند،

$$\sqrt{-۱}=i$$

۵۱ - اگر نماینده ریشکی ونمای مقدار زیر آنرا در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنند در مقدار ریشکی تغییری حاصل نمیشود،

$$\sqrt[m]{a^{p}}=\sqrt[nm]{a^{pn}}=\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{n}}}$$

## ۵۲ - تحویل چند ریشگی بیک نماینده-

برای تحویل چند ریشگی بریشگی هائی که دارای یک نماینده باشند کوچك ترین مضرب مشترك نماینده های ریشگی ها را نماینده مشترك قرار داده و آنرا بر نماینده هر ریشگی تقسیم و حاصل را در نمای مقدار زیر ریشگی ضرب مینمائیم.

مثال- میخواهیم نماینده ریشگی های $\sqrt[6]{a}$ $\sqrt[8]{b^{3}}$ $\sqrt[9]{n^{4}}$ را یکی نمائیم، کمم ۶ و ۸ و ۹ عدد ۷۲ است، پس:

$$\sqrt[6]{a}=\sqrt[72]{a^{12}} \qquad \sqrt[8]{b^{3}}=\sqrt[72]{b^{27}} \qquad \sqrt[9]{n^{4}}=\sqrt[72]{n^{32}}$$

## ۵۳ - ضرب ریشگی ها

ا - برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك m باشند مقدار زیر ریشگی ها را ضرب نموده و از حاصل ضرب ریشه m ام میگیریم:

$$\sqrt[m]{a^{p}}\ \sqrt[m]{b^{q}}\ \sqrt[m]{c^{r}}=\sqrt[m]{a^{p}b^{q}c^{r}}$$

ب - برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك نباشند نخست نماینده ریشگی ها را یکی میکنیم سپس مانند حالت قبل ضرب مینمائیم.

## ۵۴ - تقسیم ریشگی ها

ا - برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترك m باشند مقادیر زیر ریشگی ها را تقسیم نموده و از خارج-قسمت ریشه m ام میگیریم

$$\frac{\sqrt[m]{a^{p}}}{\sqrt[m]{b^{q}}}=\sqrt[m]{\frac{a^{p}}{b^{q}}}$$

ب - برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترک نباشند نخست نماینده آنها را مساوی نموده بعد آنها را تقسیم مینمائیم.

۵۵ - برای اینکه عددی راداخل یك ریشگی نمائیم آنرا بقوه نماینده ریشگی رساننده در مقدار زیر ریشگی ضرب می کنیم:

$$a^{m} \cdot \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a^{mp} \cdot b}$$

۵۶ - برای اینکه عددی را از زیر ریشگی خارج کنیم نمای آنرا برنماینده ریشگی تقسیم میکنیم و خارج قسمت‌را نمای آن عدد در خارج ریشگی و باقیمانده تقسیم را نمای آن عدد در زیرریشگی قرار میدهیم:

$$\sqrt[۷]{a^{۲} b^{۱۱} c^{۱۴}} = bc^{۲} \sqrt[۷]{a^{۲} b^{۴}}$$

۵۷ - برای اینکه ریشگی را بقوه‌ای برسانیم کافیست مقدار زیر ریشگی را بآن قوه برسانیم:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{p} = \sqrt[m]{a^{p}}$$

۵۸ - برای آنکه از ریشه mام عددی ریشه n ام بگیریم کافی است که از آن ریشه mnام بگیریم

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

۵۹ - **تعریف** - حرفی راکه زیر ریشگی باشد ونتوان آنرا خارج نمود **گنگ** گویند و اگر از زیر ریشگی خارج شود **گویا** نامند.

**۶۰ - گویا نمودن کسری که مخرجش گنگ باشد.**

۱- مخرج کسر یك جمله است - برای گویا کردن آن صورت و مخرج کسر را درعبارتی ضرب میکنیم که مخرج گویا شود، مثلا اگر مخرج $\sqrt[m]{b^p}$ باشد صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{b^{m-p}}$ ضرب میکنیم

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^p}} = \frac{a \times \sqrt[m]{b^{m-p}}}{\sqrt[m]{b^p} \times \sqrt[m]{b^{m-p}}}$$

$$= \frac{a \times \sqrt[m]{b^{m-p}}}{b}$$

**تعریف** - مزدوج دوجملهٔ $a+b$ دوجملهٔ $a-b$ است.

ب - مخرج کسر دوجمله است - برای گویا کردن کسر صورت و مخرج آنرا در مزدوج مخرج ضرب میکنیم

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$$

$$= \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

## XIII - معادلات

۶۱ - تعریف - معادله عبارت از یك تساوی است که

فقط دوطرف آن بازاءیك یاچند مقدار معین كه بجای مجهول آن قرار میدهیم بایكدیگر مساوی شوند.

**۶۲ - توجه كنید!** فرق معادله با اتحاد این است كه معادله بازاء یك یاچند مقدار معین صحیح است واتحاد بازاء جمع مقادیر.

## ۶۳ - خواص معادلات

۱ - اگر بر طرفین معادله یك عدد جبری اضافه كنیم در معادله تفاوتی حاصل نمیشود.

۲ - اگر طرفین معادله‌را بریك عدد تقسیم یا دریك عدد ضرب بنمائیم درمعادله تغییری حاصل نمیشود.

۳ - اگر عددی را ازیك طرف معادله بطرف دیگر ببریم باید علامت آنرا تغییر دهیم.

## ۶۴ - حل و بحث معادلات درجهٔ اول

معادله درجه اول یك مجهولی پس از اختصار بصورت كلی $ax=b$ نوشته میشود.

اگر $a \neq 0$ باشد معادله دارای یك ریشه $x = \frac{b}{a}$ خواهد بود.

اگر $a=0$ و $b \neq 0$ باشد معادله غیر ممكن است.

اگر $a=0$ و $b=0$ باشد معادله مبهم است.

اگر $a \neq 0$ و $b=0$ باشد ریشه معادله صفر است.

برای اینكه دومعادله درجه اول $ax=b$ و $a'x=b'$ دارای یك ریشه باشند باید $ab'-ba'=0$ باشد.

## ٦٥ - دستگاههای دو معادله‌دومجهولی درجه اول

دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول پس از اختصار باین صورت نوشته میشود:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

برای حل دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول چهار طریقه معمول است :

ا - **طریقه تحویل** - از معادله اول بفرض معلوم بودن یکی از مجهولها مجهول دیگر را بدست آورده در معادله دوم قرار میدهیم، در نتیجه یك معادله یك مجهولی درجه اول پیدا میشود که با حل آن یکی از مجهولها بدست میآید. با معلوم‌شدن یك‌مجهول پیدا کردن‌دیگری بوسیلهٔ یکی از آن دو معادله خیلی آسان است .

ب - **طریقه حذف** - در این طریقه ضرایب یکی از مجهول‌ها را در دو معادله بدو عدد قرینه‌تبدیل مینمائیم ،از جمع کردن دو معادله یك معادله یك مجهولی بدست میآید که با حل آن یك مجهول پیدا میشود . با معلوم شدن یك مجهول پیدا کردن دیگری ساده‌است.

ج- **طریقه‌قیاسی** -یکی ازمجهولات را بفرض‌معلوم‌بودن مجهول دیکر درهر یك ازدو معادله پیدا نموده‌دو مقداری را که برای آن بدست میآید مساوی قرار میدهند. پس ازحل این تساوی یکی از مجهولات بدست‌میآید و با‌معلوم بودن یك‌مجهول میتوان‌مجهول دیگر را از یکی از دو معادله پیدا نمود .

د - بوسیله فرمولهای کرامر - ریشه‌های دو معادله دو مجهولی درجه اول عبارتند از :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

اگر $ab' - ba' \neq 0$ باشد معادله دارای جواب است .

## ۶۶ - معادله درجه دوم

ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ عبارتند از

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یا اگر $b = 2b'$ فرض شود

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

ا - اگر $\Delta$ (مبین) منفی باشد معادله دارای ریشه نیست.

ب - اگر $\Delta$ (مبین) مساوی صفر باشد معادله دارای ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ یا $x = \frac{-b'}{a}$ است.

شرط لازم و کافی برای اینکه یك معادله درجه دوم دارای ریشه باشد آنستکه مبین آن مثبت باشد .

## ۶۷ - روابط بین ضرائب و ریشه‌های معادله درجه دوم

ا - حاصل جمع ریشه‌ها $x' + x'' = \frac{-b}{a}$

ب - حاصل ضرب ریشه‌ها $x' x'' = \frac{c}{a}$

ج - تفاضل ریشه‌ها $x'-x''=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

## ٦٨ - حاصل جمع قوای متشابه ریشه‌های یک معادله درجه دوم.

اگر مجموع قوای pام ریشه های معادلهٔ درجه دومی را $S_p$ فرض کنیم یعنی $S_p=x'^p+x''^p$ باشد روابط ذیل را خواهیم داشت :

$$S_1=x'+x''=\frac{-b}{a}$$

$$S_2=x'^2+x''^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$S_3-x'^3+x''^3=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

$$aS_2+bS_1+2c=0$$

$$aS(p+2)+bS(p+1)+cS_p=0$$

٦٩ - اگر S مجموع و P حاصل ضرب دو عدد باشد آن دو عدد ریشه‌های این معادله‌اند: $x^2-Sx+P=0$

٧٠ - اگر d تفاضل و p حاصل ضرب دو عدد باشد آن دو عدد ریشه‌های این معادله میباشند : $x^2-dx-P=0$

## ٧١ - علامت ریشه های معادله درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0$$

١ - اگر $\frac{c}{a}<0$ و یا $ac<0$ باشد $X''$ و $X'$ مختلف العلامه هستند .

ب - اگر $\frac{c}{a}>0$ (یا $ac>0$) باشد دو ریشه متحدالعلامه هستند

ج - اگر $ac>0$ یا ($\frac{c}{a}>0$) و $ab>0$ و $\Delta>0$ باشد هر دو ریشه منفی هستند.

د - اگر $ac>0$ (یا $\frac{c}{a}>0$) و $ba<0$ و $\Delta>0$ باشد هر دو ریشه مثبت میباشند.

برای آسان شدن بحث فرض میکنیم ریشه ای که بر حسب قدرمطلق بزرگتر است $x'$ و ریشه دیگر $x''$ باشد. جدول ذیل علائم ریشه‌ها را مشخص میسازد:

| $\Delta$ | $\frac{c}{a}$ | $-\frac{b}{a}$ | علامت ریشه‌ها |
|---|---|---|---|
| + | + | + | $x'>0$ $x''>0$ |
| + | + | − | $x'<0$ $x''<0$ |
| + | ۰ | + | $x'>0$ $x''=0$ |
| + | ۰ | − | $x'<0$ $x''=0$ |
| + | − | + | $x'>0$ $x''<0$ |
| + | − | − | $x'<0$ $x''>0$ |
| + | − | ۰ | $x'>0$ $x''<0$ $\lvert x'\rvert=\lvert x''\rvert$ |
| ۰ | $\frac{c}{a}$ قطعاً مثبت است | + | $x'=x''>0$ |
| ۰ | | − | $x'=x''<0$ |
| − | | | ریشه‌ها موهومند |

# XIV- سه جمله درجه دوم

۷۲ - سه جملهٔ $y = ax^2 + bx + c$

باین صورت نوشته میشود :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

**حالت اول** - اگر $\Delta$ یعنی $b^2 - 4ac > 0$ باشد $y = 0$ دارای دو ریشه $x'$ و $x''$ خواهد بود و سه جمله بصورت

$$y = a(x - x')(x - x'')$$

درمیاید. در اینصورت اگر به x مقادیر خارج دو ریشه داده شود علامت سه جمله با علامت a یکی است و اگر مقداری بین $x'$ و $x''$ بدهیم علامت سه جمله مخالف علامت a است.

**حالت دوم** - $b^2 - 4ac = 0$

در اینصورت

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

وعلامت سه جمله همیشه با علامت a یکی است.

**حالت سوم** - $b^2 - 4ac < 0$

در اینصورت $y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right]$ است

وبازهم علامت سه جمله همیشه باعلامت a یکی است .

**خلاصه** - علامت سه‌جمله درجه دوم بازاء مقادیری که بین ریشه‌ها باشند (درصورت وجود دو ریشه) مخالف علامت a وبازاء سایر مقادیر همواره موافق علامت a است.

## ۷۳ - مقایسه عدد باریشه‌های سه جمله درجه دوم

$ax^2 + bx + c$

شرط لازم و کافی برای اینکه عدد $\alpha$ بین ریشه ها قرار داشته باشد آنست که $af(\alpha) < 0$ باشد.

ب - شرط لازم و کافی برای اینکه عدد $\alpha$ کوچکتر از دو ریشه باشد:

$$\Delta > 0 \quad af(\alpha) > 0 \quad \text{و} \quad \alpha < -\frac{b}{2a} \;\text{یا}\; \alpha + \frac{b}{2a} < 0$$

ج - شرط لازم و کافی برای اینکه $\alpha$ بزرگتر از دو ریشه باشد:

$$\Delta > 0 \quad af(\alpha) > 0 \quad \alpha > -\frac{b}{2a} \;\text{یا}\; \alpha + \frac{b}{2a} > 0$$

## ۷۴ - مقایسه دو عدد $\alpha$ و $\beta$ باریشه های سه جمله

$ax^2 + bx + c$

(برای آسان شدن نخست $\alpha$ را از $\beta$ و $x''$ را از $x'$ کوچکتر فرض میکنیم). هرگاه:

$\alpha < x'' < \beta < x'$ $\quad af(\alpha) > 0$ و $\quad f(\alpha)f(\beta) < 0$

$x'' < \alpha < x' < \beta$ $\quad af(\beta) > 0$ و $\quad$ «

$\alpha < \beta < x'' < x'$ $\quad \alpha < \beta < -\frac{b}{2a}$ $\quad \Delta > 0$ $\quad f(\alpha)f(\beta) > 0$

$x'' < x' < \alpha < \beta$ $\quad -\frac{b}{2a} < \alpha < \beta$ $\quad$ « $\quad$ «

$x'' < \alpha < \beta < x'$ $\quad af(\alpha) < 0$ $\quad f(\alpha)f(\beta) > 0$

## ۷۵ - مقایسه ریشه های دو سه جمله

اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های سه‌جمله $f(x)=ax^2+bx+c$

و $x'_1$ و $x'_2$ ریشه‌های سه‌جمله $f_1(x)=a'x^2+b'x+c'$ باشند:

شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه جمله دارای یك ریشه مشترك باشند:

$$R=(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$$

اگر $R=0$ و $ab'-ba'\neq 0$ باشد ریشه مشترك عبارتست از

$$x=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

اگر $R\neq 0$ باشد دو سه جمله دارای ریشه مشترك نیستند.

ب - شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه جمله‌دارای دو ریشه مشترك باشند آنستکه

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \text{ و } \Delta>0 \text{ باشد}$$

ج - شرط لازم و کافی برای اینکه یك ریشهٔ یکی از سه جمله‌ها مابین ریشه‌های سه جملهٔ دیگر واقع باشد آنستکه $R<0$ باشد بعلاوه:

اگر $R<0$ و $-\frac{b'}{2a'}<-\frac{b}{2a}$ ، $x_1<x'_1<x_2<x'_2$

اگر $R<0$ و $-\frac{b'}{2a'}>-\frac{b}{2a}$ ، $x'_1<x_1<x'_2<x_2$

## XV معادلات قابل تبدیل بمعادله درجه دوم

### ٧٦ - معادله دو مجذوری $ax^4 + bx^2 + c = 0$

١ - شرط کافی برای اینکه این معادله دارای دو ریشه باشد آنستکه $\frac{c}{a} < 0$ یا $ac < 0$ باشد و دو ریشه آن عبارتند از :

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

٢ - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله فوق دارای چهار ریشه مشخص باشد آنستکه :

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad -\frac{b}{a} > 0 \quad \frac{c}{a} > 0$$

٣ - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله دو مجذوری دارای ریشه مضاعف باشد این است که $-\frac{b}{a} > 0$ $b^2 - 4ac = 0$ باشد و ریشه آن عبارتست از

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

٤ - اگر $c = 0$ باشد دو تا از ریشه‌های معادله فوق صفر میباشند و دو ریشه دیگر $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ خواهند بود اگر $-\frac{b}{a} > 0$ باشد .

### ٧٧ معادلات معکوسه

**تعریف** - معادله را معکوسه گویند در صورتیکه ریشه‌های آن عکس یکدیگر باشند مثلا اگر a یکی از

ریشه‌های معادله معکوسه درجه دوم باشد ریشه دیگر آن $\frac{1}{a}$ خواهد بود.

در معادلات معکوسه ضرایب جمله هائیکه از وسط معادله بیك فاصله باشند مساوی هستند.

## ۷۸ - حل معادلات معکوسه -

معادله معکوسه‌ای که بزرگترین درجه مجهول آن فرد باشد بر $x \pm 1$ قابل قسمت است بنابراین $\mp 1$ یکی از ریشه‌های آن است و برای پیدا کردن سایر ریشه ها معادله را بر $x \pm 1$ تقسیم نموده ریشه خارج قسمت را مطابق قواعد پیش پیدا میکنیم.

ب - معادلات معکوسه‌ایکه درجه آنها زوج باشد - برای نمونه معادله درجه چهارم معکوسه زیر را حل میکنیم :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

طرفین معادله را بر $x^2$ تقسیم میکنیم

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

از ضرایب مساوی فاکتور میگیریم :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{2}{x}\right) + c = 0$$

فرض میکنیم $x + \frac{1}{x} = y$ آنوقت $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

و معادله بصورت زیر در میآید

$$a(y^2 - 2)b + y + c = 0$$

$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

برای حل و بحث بشماره ٦٦ مراجعه شود .

## ۷۹ - معادلات معکوسه درجه سوم

### ۱ - معادله نوع اول معکوسه درجه سوم

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

دارای یك ریشه $x = -1$ است و ریشه های دیگرش ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + (b-a)x + a = 0$ میباشد

### ۲ - معادله نوع دوم

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

دارای یك ریشه $x = 1$ است و ریشه‌های دیگر آن ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + (a+b)x + a = 0$ میباشد

## ۸۰ - معادله معکوسه درجه چهارم

### ۱ - نوع اول $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

اگر $y'$ و $y''$ ریشه‌های معادله درجه دوم $ay^2 + by + c - 2a = 0$ باشد (۷۸) ریشه معادله معکوسه عبارتند از ریشه های معادله

$$x^2 - y'x + 1 = 0 \quad و \quad x^2 - y''x + 1 = 0$$

### ۲ - نوع دوم

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از: $x = \pm 1$ و ریشه‌های معادله

$$ax^2 + bx + a = 0$$

## ۸۱ - معادله معکوسه درجه پنجم

### ۱ - نوع اول

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

دارای یك ریشه $x = -1$ است و ریشه‌های دیگر آن ریشه‌های معادله معکوسه درجه چهارم ذیل است:

$$ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b+a)x^2 + (b-a)x + a = 0$$

**ب - نوع دوم**

$$ax^5 + xx^4 - cx^3 - bx - a = 0$$

که دارای یك ریشه $x = 1$ میباشد و ریشه های دیگر آن ریشه‌های معادله‌درجه چهارم

$$ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (a+b)x + a = 0$$

**۸۲ معادلات اصم** - برای حل معادلات اصم طرفین معادله‌را آنقدر بقوه میرسانیم تامعادله منطقی بدست آید، بعد معادله حاصل را بر طبق قواعد فوق حل‌میکنیم.

**مثال**

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{x+15}$$

طرفین را بقوه ۲ میرسانیم :

$$x-1+x-6+2\sqrt{x^2-76\times} = x+15$$

و یا

$$2\sqrt{x^2-7x+6} = 22-x$$

باز طرفین را بقوه ۲ میرسانیم

$$4(x^2-7x+6) = 484-44x+x^2$$

$$3x^2+16x-460 = 0$$

$$x = 10 \qquad x = -\frac{46}{3}$$

**۸۳ - تبصره** - چون طرفین معادله را بقوه برسانیم ممکن است ریشه‌های اضافی پیدا شود. درمثال فوق $-\frac{46}{3}$ ریشه اضافی وغیر قابل قبول است.

# XVI نامساوی

**۸۴- تعریف —** اگر دو عبارت باهم مساوی نباشند یکی از دیگری کوچکتر است یا بزرگتر؛ اگر کوچکتر باسد بااین علامت > واگر بزرگتر است با این علامت < نمایش میدهند وآنرا نامساوی میگویند

## ۸۵ـ خواص نامساوی

ا ـ اگر در طرفین نامساوی دو عدد مساوی اضافه یا کم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمی‌شود.

ب ـ اگر طرفین نامساری را درعدد مثبتی ضرب یا بر یك عدد مثبت تقسیم کنیم درنامساوی تغییری حاصل نمیشود

ج ـ اگر طرفین نامساوی را دریك عدد منفی ضرب یا بریك عدد منفی تقسیم نمائیم جهت آن تغییر میکند .

د ـ اگر طرفین نامساوی را بقوه فرد برسانیم دران تغییری پیدا نمی‌شود .

ه ـ اگر طرفین يك نامساوی را که هردومثبت باشند بقوه زوج برسانیم درنامساوی تغییری پیدا نمیشود.

و ـ اگر طرفین يك نامساوی را که هردومنفی باشند بقوه زوج برسانیم جهت نامساوی تغییر میکند .

**۸٦ ـ نامساوی درجه اول يك مجهولی** پس از اختصار بصورت $ax > b$ نوشته میشود.

اگر $a > 0$ باشد جوابهای نا مساوی عبارتند از

$$x > \frac{b}{a}$$

اگر $a < 0$ » » » » » »

$$x < \frac{b}{a}$$

## ۷۸ - نامساوی درجه دوم $ax^{2}+bx+c>0$

اولا، اگر $\Delta<0$ باشد،

ا - درصورتیکه $a>0$ باشد نامساوی بازاء جمیع مقادیر $x$ محقق است

ب - درصورتیکه $a<0$ باشد نامساوی غیر ممکن است.

ثانیاً، اگر $\Delta=0$ باشد:

ا - در صورتیکه $a>0$ باشد نا مساوی بازاء جمیع مقادیر $x$ محقق است مگر بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ که صفر میشود

ب - درصورتیکه $a<0$ باشد نامساوی غیر ممکن است:

ثالثاً، اگر $\Delta>0$ باشد

ا - درصورتیکه $a>0$ و $x'<x''$ باشند بازاء مقادیری کوچکتر از $x'$ یا بزرگتر از $x''$ نامساوی محقق است

ب - درصورتیکه $a<0$ باشد نامساوی بازاء مقادیر مابین $x'$ و $x''$ محقق است

$$x'<x<x''$$

## ۸۸ - نامساویهای درجه $m$ ام

برای حل نامساویهای درجه $m$ ام آنها را بحاصلضرب عوامل تجزیه نموده بعداً علامت هریك ازعوامل را پیدا کرده درجدولی ثبت میکنیم وازروی جدول نتیجه مطلوب را پیدامینمائیم

**مثال** - نامساوی ذیل را حل نمائید

$$f(x)=x^{3}-8x^{2}+19x-12>0$$

آنرا بحاصلضرب عوامل تجزیه میکنیم:

$$f(x)=(x-1)(x-3)(x-4)>0$$

| $x$ | $-\infty$ ١ ٣ ٤ $+\infty$ |
|---|---|
| $x-$١ | $-$ ٠ $+$ $+$ $+$ |
| $x-$٣ | $-$ $-$ ٠ $+$ $+$ |
| $x-$٤ | $-$ $-$ $-$ ٠ $+$ |
| $f(x)$ | $-$ $+$ $-$ $+$ |

ریشه های نامساوی عبارتند از { ١ $<x<$ ٣ ، $x>$ ٤ }

## ٨٩ - نامساوی کسری

برای حل نامساویهای کسری صورت و مخرج را در مخرج ضرب میکنیم و علامت صورت کسر حاصل را پیدا مینمائیم .

# XVII تصاعد حسابی

٩٠ - *تعریف*- تصاعد حسابی رشته اعدادی است که تفاضل هر دو جمله پیاپی آن مقدار ثابتی باشد و آن مقدار ثابت را **قدر نسبت** تصاعد مینامند .

٩١ - اگر در تصاعدی هر جمله از جمله قبل از آن بزرگتر باشد تصاعد صعودی والا نزولی است. در حالت اول قدر نسبت عددی است مثبت و در حالت دوم عددی منفی است .

٩٢ - اگر در تصاعد حسابی $a$ جمله اول و $l$ جملهٔ $n$ ام و $r$ قدر نسبت باشد :

١ - مقدار جمله $n$ ام : $l=a+(n-1)r$

ب - S حاصل جمع n جمله اول : $S = \frac{n(a+l)}{2}$

ج - اگر p واسطه حسابی بین دو جمله متوالی یك تصاعد حسابی درج کنیم r' قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$r' = \frac{r}{p+1}$$

۹۳ - در تصاعد حسابی محدود که عده جمل زوج باشد مجموع هردو جمله متساوی البعد از طرفین مقداریست ثابت و مساویست با مجموع دو جمله اول و آخر و اگر عده جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با واسطه عددی هر دو جمله متساوی البعد از طرفین .

## ۹۴ - دستورهای مختلف :

ا - حاصل جمع n عدد متوالی از سلسلهٔ اعداد طبیعی که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب - حاصل جمع n عدد زوج متوالی در سلسله طبیعی اعداد عبارتست از : $S=n(n+1)$

ج - مقدار عدد n ام اعداد فرد از سلسله طبیعی اعداد عبارتست از : $l=2n-1$

د - حاصل جمع n عدد از اعداد فرد سلسله طبیعی اعداد عبارتست از: $S=n^2$

ه - حاصل جمع مربعات n عدد متوالی از سلسله طبیعی

اعداد که ازواحد شروع شود عبارتست از :

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و - حاصل جمع مکعبات n عدد متوالی از سلسله اعداد طبیعی که ازواحد شروع شود عبارتست از :

$$S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

## XVIII تصاعد هندسی

۹۵- **تعریف** -تصاعد هندسی رشته اعدادیست که‌خارج قسمت هردوجمله پیاپی آن مقدارثابتی باشد این مقدار ثابت را قدرنسبت تصاعد هندسی گویند .

۹۶- هرگاه‌هرجمله ازتصاعدازجمله‌قبل ازآن بزرگتر باشد تصاعد صعودی والا نزولی‌است. درحالت اول‌قدرنسبت بزرگتر از واحد ودرحالت دوم کوچکتر ازواحداست.

۹۷- اگردرتصاعدی هندسی a جمله اول ، l جمله n ام و q قدرنسبت باشد :

ا- مقدار جمله n ام : $l=aq^{n-1}$

ب - S حاصل جمع جملهٔ n اول تصاعد :

$$S=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

ج - p حاصل ضرب n جمله اول تصاعد :

$$p=\sqrt{(al)^n}$$

د - اگر p واسطهٔ هندسی بین دوجمله متوالی یك تصاعد هندسی درج کنیم q' قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$q' = \sqrt[q+1]{q}$$

هـ - حد مجموع جمل یك تصاعد هندسی نزولی وقتیکه عده جمل بینهایت زیاد شود :

$$\lim S_{n \to \infty} = \frac{a}{1-q}$$

۹۸ - در تصاعد هندسی محدود که عده جمل زوج باشد حاصل ضرب هردوجمله متساوی البعد از طرفین مقداریست ثابت ومساویست با حاصل ضرب دوجمله اول وآخر واگر عده جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است باجذر حاصل ضرب (واسطه هندسی) هردوجمله متساوی البعد از طرفین

## XIX - لگاریتم

۹۹ - **تعریف** - دوتصاعد نامحدود، یکی هندسی که جمله اولش یك وقدر نسبت آن q ودومی حسابی که جمله اولش صفر وقدر نسبت آن r باشد، فرض نموده وآنها راجمله بجمله بطوری زیرهم مینویسیم که صفر تصاعد حسابی زیر یك از تصاعد هندسی قرار گیرد، باینطریق :

$$\begin{cases} \div\div \cdots : q^{-m} : \cdot \ \cdot \ \cdot : q^{-۲} : q^{-۱} : ۱ : q : q^{۲} : \cdot \ \cdot \ \cdot : q^{m} : \cdot\cdot \\ \div \ \cdots \ -mr \cdots \ . \ -۲r \cdot \ -r \ . \ o \ . \ r \ . \ ۲r \cdot \ . \ \cdot\cdot mr \cdot \ . \ \cdot \end{cases}$$

دورشته تصاعدی که بطریق بالا نوشته شده باشند

دستگاه لگاریتم را تشکیل میدهند ودر آن هرجمله ازتصاعد عددی لگاریتم (log) جمله نظیرش ازتصاعد هندسی و هر جمله ازتصاعد هندسی عدد مابازاء یا آنتی لگاریتم جمله نظیرش ازتصاعدعددی است؛ مثلا :

$$\log q^{۴} = ۲r$$

و $q^{۴} =$ عدد مابازاء ۲r

۱۰۰- باتوجه باینکه $\frac{۱}{q} = q^{-۱}$، چون جمله های تصاعد هندسی همیشه مثبت اند پس فقط اعداد مثبت دارای لگاریتم هستند و اعداد کوچکتر ازواحد دارای لگاریتم منفی میباشند همچنین $\log ۰ = -\infty$ و $\log \infty = \infty$ وهمیشه $\log ۱ = ۰$

۱۰۱-درهر دستگاه لگارتیم عددی را که لگاریتم آن یك است مبنای آندستگاه مینامند.

۱۰۲-لگاریتم عدد A در دستگاهی بمبنای a عددیست مانند x که چون مبنای a را بقوۀ آن برسانیم حاصل مساوی A گردد یعنی :

$$x = \log_a A$$

اگر $a^x = A$

۱۰۳- اگر A و a مثبت باشند همیشه برای x مقداری، که غالباً اصم خواهد بود، بدست میآید

۱۰۴-هرگاه $A = a$ فرض شود $x = ۱$ میشود یعنی لگاریتم مبنا همیشه مساوی یك است (نمره ۱۰۰)

## خواص لگاریتم

۱۰۵- لگاریتم حاصل ضرب چند عدد مثبت مساوی است

با مجموع لگارتیم‌های آن اعداد :

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

۱۰۶- لگاریتم خارج قسمت دوعدد مثبت مساوی است با تفاضل لگاریتم صورت ومخرج :

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

۱۰۷- لگاریتم عکس هر عدد مساویست با لگاریتم آنعدد با علامت مخالف و آنرا کلگاریتم (Cologarithme) آنعدد نامند یعنی :

$$\log \frac{1}{b} = -\log b = \operatorname{colog} b$$

پس

$$\log \frac{a}{b} = \log a + \operatorname{colog} b$$

۱۰۸ - لگاریتم قوه mام هر عدد مساویست با m برابر لگاریتم آن :

$$\log a^m = m \log a$$

۱۰۹- لگاریتم ریشه mام هر عدد مساویست با $\frac{1}{m}$ لگاریتم آنعدد

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$$

## لگاریتم اعشاری یا لگاریتم (Vulgaires):

۱۱۰- در دستگاه لگاریتم اعشاری مبنا ده و قدر نسبت تصاعد عددی یك و قدر نسبت تصاعد هندسی ده میباشد باینطریق:

$$\div\ 0.0 : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10 : 10^2 : 0.0$$

$$\div\ 0.0 - 2 . - 1 . \ 0 . 1 . 2 : 0.0$$

۱۱۱ - لگاریتم اعدادی که محصور بین قوای متوالیه ۱۰ باشند دارای یك جزء صحیح بنام مفسر و یك جزء اعشاری بنام **مانتیس** میباشد

۱۱۲ - اگر عددی را در یکی از قوای ۱۰ ضرب و یا بر آن تقسیم نمائیم درجزء اعشاری لگاریتم آن تغییری حاصل نمیشود ولی عددی مساوی نماینده آن قوه به مفسر اضافه یا از آن کم میشود :

$$\log(A.\ ۱۰^m)=\log A+\log ۱۰^m=\log A+m$$

$$\log\left(\frac{A}{۱۰^m}\right)=\log A-\log ۱۰^m=\log A-m$$

۱۱۳- مفسر لگاریتم هر عدد بزرگتر از واحد عددی است مساوی عده ارقام صحیح همان عدد منهای یك .

۱۱۴ - چون لگاریتم اعداد کوچکتر از واحد منفی است معمولا آنرا بطریق زیر تبدیل به مانتیس مثبت و مفسر منفی مینمایند :

فرض میکنیم $\log A=-۲٫۷۵۲۴۱$ باشد آن را بترتیب چنین مینویسیم :

$$\log A=-۲-۰٫۷۵۲۴۱=-۲-۱+۱-۰٫۷۵۲۴۱$$

$$=(-۲-۱)+(۱-۰٫۷۵۲۴۱)=$$

$$=-۳+۰٫۲۴۷۵۹$$

ودرموقع نوشتن برای اینکه نمایش دهند فقط مفسر منفی است علامت -- را بالای مفسر میگذارند، باینطریق :

$$\log A=\overline{۳}٫۲۴۷۵۹$$

تبصره - کلگاریتم اعداد را نیز بطریق بالا تبدیل

بمفسر منفی ومانتیس مثبت مینمایند.

مفسر منفی اعداد کوچکتر از واحد برابر است با تعداد صفرهائی که درطرف چپ اولین رقم با معنای آن عدد قرار دارد .

۱۱۵-اگر لگاریتمهای اعداد در دستگاهی بمبنای a دردست باشند و بخواهیم لگاریتمهای آنها را در دستگاهی بمبنای b بدست آوریم باید لگاریتمهای آنها را که بمبنای a است در مقدار ثابت $\frac{1}{\log a\ b}$ (عکس لگارتیم b دردستگاه بمبنای a) ضرب کنیم ( مقدار ثابت $\frac{1}{\log a\ b}$ رامدول module گویند )

## چهارعمل اصلی درلگاریتم

۱۱۶ - درجمع لگاریتمها مانتیس‌ها را باهم جمع نموده ومفسرها را جمع جبری مینمائیم .

۱۱۷ - درتفریق لگاریتمها بجای مفروق کلگاریتم عدد را مینویسیم وعمل تفریق بجمع مبدل میشود .

۱۱۸ -درضرب عددصحیح درلگاریتم عدد بزرگتراز یك مانند ضرب اعداد اعشاری عمل مینمائیم .

۱۱۹ - برای ضرب عدددرست درلگاریتم عدد کوچکتر از یك چون لگاریتم عدد کوچکتر از یك مرکب از مفسر منفی مانتیس مثبت است عدددرست رادرمانتیس ضرب نموده وبین جزء صحیح حاصل با حاصل ضرب آن عدد درمفسرمنفی جمع جبری بجا میآوریم .

۱۲۰ - درتقسیم لگاریتم عددبزرگتر ازیك درعددصحیح مانند تقسیم اعداد اعشاری برعدد صحیح عمل مینمائیم .

۱۲۱ - درتقسیم لگاریتم عدد کوچکتر ازیك برعددصحیح

دو حالت اتفاق میافتد .

۱ - مفسر منفی بتنهائی بر مقسوم علیه قابل قسمت است، در اینصورت مفسر و مانتیس را جداجدا بر مقسوم علیه تقسیم نموده خارج قسمت را بصورت لگاریتم عدد کوچکتر از یك مینویسیم .

مثال: $\bar{8},72424 : 4 = -\frac{8}{4} + \frac{0,72424}{4}$

$= -2 + 0,18106 =$

$= \bar{2},18106$

۲- مفسر منفی به تنهائی بر مقسوم علیه قابل قسمت نیست، در اینحال آنقدر واحد منفی بمفسر منفی می افزائیم تا قابل قسمت شود و بهمین اندازه هم واحد مثبت بمانتیس مثبت اضافه میکنیم تا در لگاریتم تغییری حاصل نگردد بعد مانند حالت قبل عمل مینمائیم :

مثال: $\bar{3}/72635 : 5 = \frac{-3+0,72635}{5} =$

$= \frac{-3-2+2+0,72635}{5} =$

$= \frac{-5+2,72635}{5} = -\frac{5}{5} + \frac{2,72635}{5} =$

$= -1 + 0,54527 = \bar{1}/54527$

۱۲۲-در تقسیم لگاریتم بر لگاریتم نیز دو حالت اتفاق میافتد :

۱ - اگر مقسوم و مقسوم علیه هردو لگاریتم مثبتند مانند تقسیم دوعدد اعشاری عمل مینمائیم .

۲ - اگر مقسوم و مقسوم علیه یا یکی از آنها منفی است بجای آن کلگاریتم میگذاریم و مانند حالت قبل عمل مینمائیم .

## جدولهای لگاریتم

۱۲۳ - جدولهای لگاریتم جدولهائی است که بکمک آنها میتوان لگاریتمهای اعداد رابدست آورد ، یا عددهائی را که لگاریتمهایشان دردست است پیدا نمود . چون تعیین مفسر لگاریتم آسان است درجداول فقط مانتیس لگاریتم اعدادرا ثبت کرده‌اند .

۱۲۴ - جدولهای لگاریتم بردوقسم‌اند :

۱ - جدولهای بزرك که درآنها لگاریتم اعداد تا هفت رقم اعشار داده شده است .

۲ - جدولهای کوچك که درآنها لگاریتم اعداداز۱ تا ۱۰۰۰ با پنج رقم اعشار نوشته شده است .

درمحاسبات عادی میتوان ازجدولهای کوچك استفاده نمود و نتیجه محاسبه را با تقریب کافی بدست آورد . از جدولهای کوچك که بیشترمورد استفاده دانش آموزان‌است . جدول دوپوئی‌است که ترجمه فارسی‌آن نیز ازطرف وزارت فرهنگ چاپ شده . طرزاستفاده ازجداول درهریك از آنها نوشته شده‌است .

۱۳۵ - ملدر جدول صفحهٔ۷۷ مانتیس لگاریتم عددهای از ۱ تا۱۰۰ را درج میکنیم ٠

| عدد | لگاریتم | عدد | لگاریتم | عدد | لگاریتم | عدد | لگاریتم | عدد | لگاریتم |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠١ | ٠٠٠٠٠ | ٢١ | ٣٢٢٢٢ | ٤١ | ٦١٢٧٨ | ٦١ | ٧٨٥٣٣ | ٨١ | ٩٠٨٤٩ |
| ٢ | ٣٠١٠٣ | ٢ | ٣٤٢٤٢ | ٢ | ٦٢٣٢٥ | ٢ | ٧٩٢٣٩ | ٢ | ٩١٣٨١ |
| ٣ | ٤٧٧١٢ | ٣ | ٣٦١٧٣ | ٣ | ٦٣٣٤٧ | ٣ | ٧٩٩٣٤ | ٣ | ٩١٩٠٨ |
| ٤ | ٦٠٢٠٦ | ٤ | ٣٨٠٢١ | ٤ | ٦٤٣٤٥ | ٤ | ٨٠٦١٨ | ٤ | ٩٢٤٢٨ |
| ٥ | ٦٩٨٩٧ | ٥ | ٣٩٧٩٤ | ٥ | ٦٥٣٢١ | ٥ | ٨١٢٩١ | ٥ | ٩٢٩٤٢ |
| ٦ | ٧٧٨١٥ | ٦ | ٤١٤٩٧ | ٦ | ٦٦٢٧٦ | ٦ | ٨١٩٥٤ | ٦ | ٩٣٤٥٠ |
| ٧ | ٨٤٥١٠ | ٧ | ٤٣١٣٦ | ٧ | ٦٧٢١٠ | ٧ | ٨٢٦٠٧ | ٧ | ٩٣٩٥٢ |
| ٨ | ٩٠٣٠٩ | ٨ | ٤٤٧١٦ | ٨ | ٦٨١٢٤ | ٨ | ٨٣٢٥١ | ٨ | ٩٤٤٤٨ |
| ٩ | ٩٥٤٢٤ | ٩ | ٤٦٢٤٠ | ٩ | ٦٩٠٢٠ | ٩ | ٨٣٨٨٥ | ٩ | ٩٤٩٣٩ |

| عدد | لگاریتم | عدد | لگاریتم | عدد | لگاریتم | عدد | لگاریتم | عدد | لگاریتم |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١١ | ٠٤١٣٩ | ٣١ | ٤٩١٣٦ | ٥١ | ٧٠٧٥٧ | ٧١ | ٨٥١٢٦ | ٩١ | ٩٥٩٠٤ |
| ٢ | ٠٧٩١٨ | ٢ | ٥٠٥١٥ | ٢ | ٧١٦٠٠ | ٢ | ٨٥٧٣٣ | ٢ | ٩٦٣٧٩ |
| ٣ | ١١٣٩٤ | ٣ | ٥١٨٥١ | ٣ | ٧٢٤٢٨ | ٣ | ٨٦٣٣٢ | ٣ | ٩٦٨٤٨ |
| ٤ | ١٤٦١٣ | ٤ | ٥٣١٤٨ | ٤ | ٧٣٢٣٩ | ٤ | ٨٦٩٢٣ | ٤ | ٩٧٣١٣ |
| ٥ | ١٧٦٠٩ | ٥ | ٥٤٤٠٧ | ٥ | ٧٤٠٣٦ | ٥ | ٨٧٥٠٦ | ٥ | ٩٧٧٧٢ |
| ٦ | ٢٠٤١٢ | ٦ | ٥٥٦٣٠ | ٦ | ٧٤٨١٩ | ٦ | ٨٨٠٨١ | ٦ | ٩٨٢٢٧ |
| ٧ | ٢٣٠٤٥ | ٧ | ٥٦٨٢٠ | ٧ | ٧٥٥٨٧ | ٧ | ٨٨٦٤٩ | ٧ | ٩٨٦٧٧ |
| ٨ | ٢٥٥٢٧ | ٨ | ٥٧٩٧٨ | ٨ | ٧٦٣٤٣ | ٨ | ٨٩٢٠٩ | ٨ | ٩٩١٢٣ |
| ٩ | ٢٧٨٧٥ | ٩ | ٥٩١٠٦ | ٩ | ٧٧٠٨٥ | ٩ | ٨٩٧٦٣ | ٩ | ٩٩٥٦٤ |

# XX - ربح مرکب

۱۲۶ - **تعریف** - اگر مبلغی را با نرخ معینی بمرابحه بگذاریم و در آخر هر سال سود آنرا بسرمایه افزوده سرمایه سال بعد قرار دهیم گوئیم آن مبلغ بربح مرکب داده شده است

۱۲۷ - در ربح مرکب معمولا نرخ عبارتست از سود یک ریال در یکسال

۱۲۸ - اگر $a$ سرمایه و $r$ نرخ و $A$ مجموع سرمایه و سود پس از $n$ سال باشد.

$$A = a(1+r)^n \qquad (1)$$

$$\log A = \log a + n\log(1+r) \qquad (2)$$

از فورمول (۲) میتوان فورمولهای زیر را بدست آورد:

۱) $\log a = \log A + n\,\mathrm{colog}(1+r)$

۲) $n = \dfrac{\log A + \mathrm{colog}\,a}{\log(1+r)}$

۳) $\log(1+r) = \dfrac{\log A + \mathrm{colog}\,a}{n}$

فورمول (۲) در مواردیکه مدت صحیح یا کسری باشد استعمال میشود.

# XXI قسط السنین

۱۲۹ - **تعریف** - قسط السنه مبلغ پولی است که کسی برای تشکیل سرمایه یا پرداخت قرض مرتباً در اول یا آخر هر

سال در مدت چندسال میپردازد .

## ۱۳۰ - قسط السنین برای تشکیل سرمایه

فرض میکنیم a ریال مبلغی باشد که در اول هر سال پرداخته میشود و r سود سالیانه یکریال در یکسال و A ریال مبلغ آخری که در آخر سال n ام بدست میآید باشد در اینصورت :

$$A = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$a = \frac{Ar}{1+r} \cdot \frac{1}{(1+r)^m + 1}$$

۱۳۱ - **تبصره** - محاسبه r یا n از روی سه عامل معلوم دیگر بتقریب بکمك جدولهای عددی مخصوص بدست میآید .

## ۱۳۲ - قسط السنین برای استهلاك دین

- اگر A ریال مبلغ دریافتی و a ریال مبلغ قسط پرداختی در آخر هر سال و n عده اقساط و r سود سالیانه یك ریال باشد .

$$a = Ar \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

مبلغ استهلاکی $\alpha_1$ در آخر سال اول عبارت خواهد بود $\alpha_1 = a - Ar$ و مبلغ استهلاکی $\alpha p$ و در آخر سال p ام عبارتست از :

$$\alpha_p = \alpha_1 (1+r)_p^{-1} = (a - Ar)(1+r)_p^{-1}$$

# XXII نمایش هندسی

۱۳۳ - تعریف - برای اینکه نقطه M را بموازات امتداد △ برخط D تصویر کنیم از M خطی موازی △ میکشیم تا D را قطع کند. تصویر نقطه N بموازات صفحه p برخط △ محل تلاقی △ با صفحه ایست که از N بموازات p رسم شود.

**۱۳۴ محور - مبدأ - مختصات** - هرگاه از روی خط نامحدود x'x جهتی مثلا از چپ براست ، را مثبت اختیار کنیم آن خط تشکیل یك محور میدهد . نقطه ثابت O واقع بر محور را که نقاط دیگر محور بوسیله فاصله‌شان از آن مشخص میگردند **مبداء** میگویند.

خطی را که از مبداء بیك نقطه غیر واقع بر محور وصل کنند **شعاع حامل** آن نقطه نامند ،

برای معین ساختن جای هر نقطه برروی خط ، صفحه یا فضا مشخصاتی لازمست که آنها را مختصات گویند.

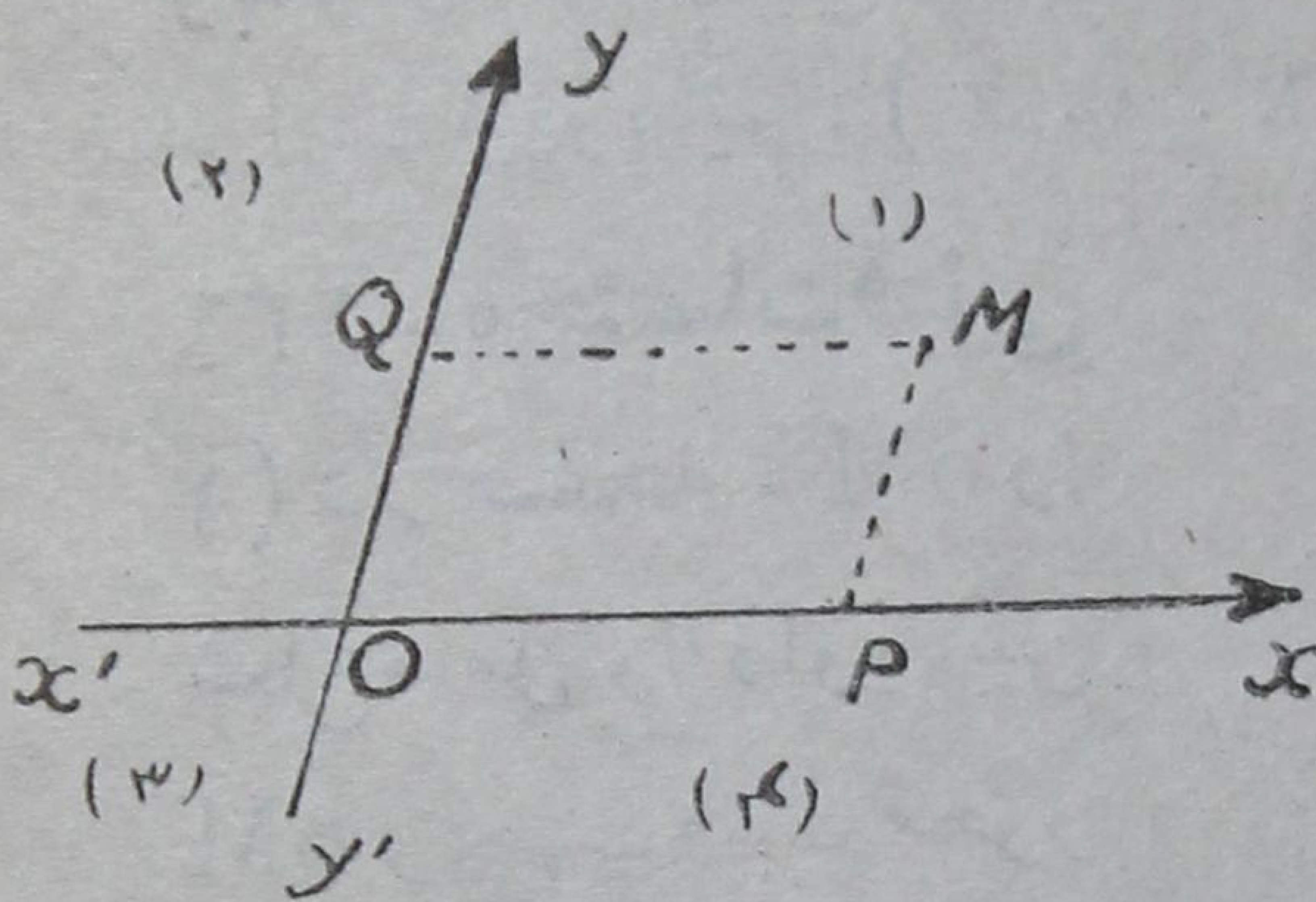
فاصله هر نقطه واقع بر محور را از مبداء **طول** یا **ابسیس** آن نقطه نامند. طول نقطه برای مشخص ساختن هر نقطه واقع بر محور کافیست.

هر نقطهٔ صفحه ممکن است بوسیله تصاویرش بر دو محور متقاطع ( **مختصات دکارتی** ) یا بکمك طول شعاع حامل و زاویه این شعاع با محور (مختصات قطبی) مشخص شود.

هر نقطه در فضا بوسیله تصاویرش بر سه محور متقارت غیر واقع دریك صفحه (مختصات دکارتی) یا با شعاع حامل و زاویه

این شعاع با یك صفحه که برمبداء میگذردوزاویه‌تصویرشعاع حامل برروی این صفحه با محرری که بسر مبداء مرور نماید (مختصات قطبی)معین میگردد.

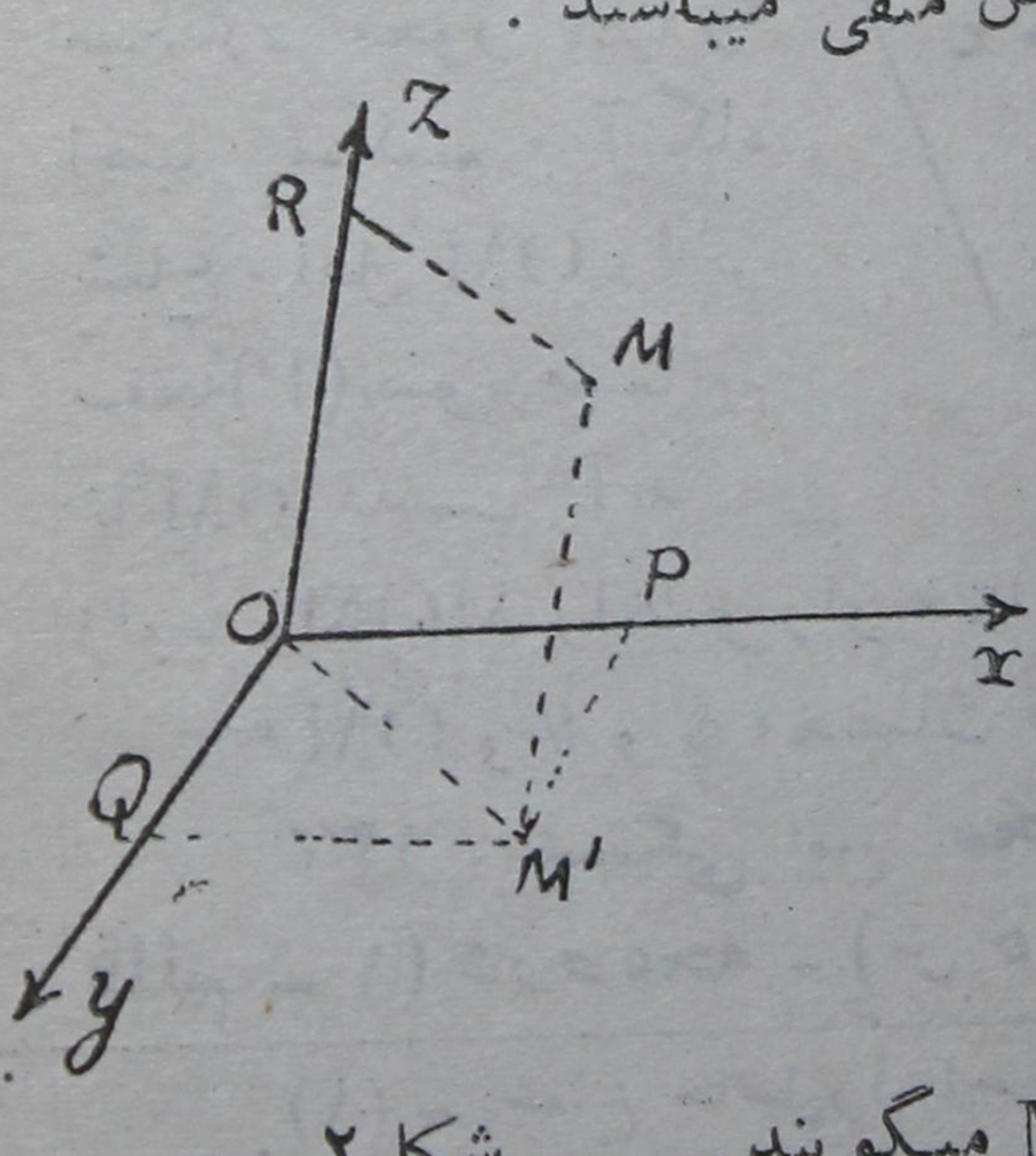
**۱۳۵- مختصات دکارتی - ۱)درصفحه** - دومحور متقاطع ox،oy اختیار میکنیم و نقطهٔ M را بموازات ox بر oy و بموازات oy بر ox تصویر میکنیم تا P و Q بدست آید. OP را **طول** یا **آبسیس** و OQ را عرض یا (Ordonnée) نقطهٔ M میگویند.




شکل ۱

دو محور نا محدود ox و oy صفحه را بچهار ناحیه تقسیم میکنند (ش ۱) در ناحیه ۱ هر دو مختص مثبت، در ناحیه ۲ طول منفی و عرض مثبت، در ناحیه ۳ هردو منفی و در ناحیه ٤ طول مثبت وعرض منفی میباشند.

**۲)درفضا** - نقطه M را برهریك از سه‌محور متقارب ox ، oy ، oz به موازات صفحه‌ای که بردومحوردیگرمیگذرد تصویر میکنیم تا P و Q و R بدست آیند(ش ۲) OP و OQ و OR را بترتیب طول و عرض و ارتفاع (بلندی یاCote) نقطهٔM میگویند.

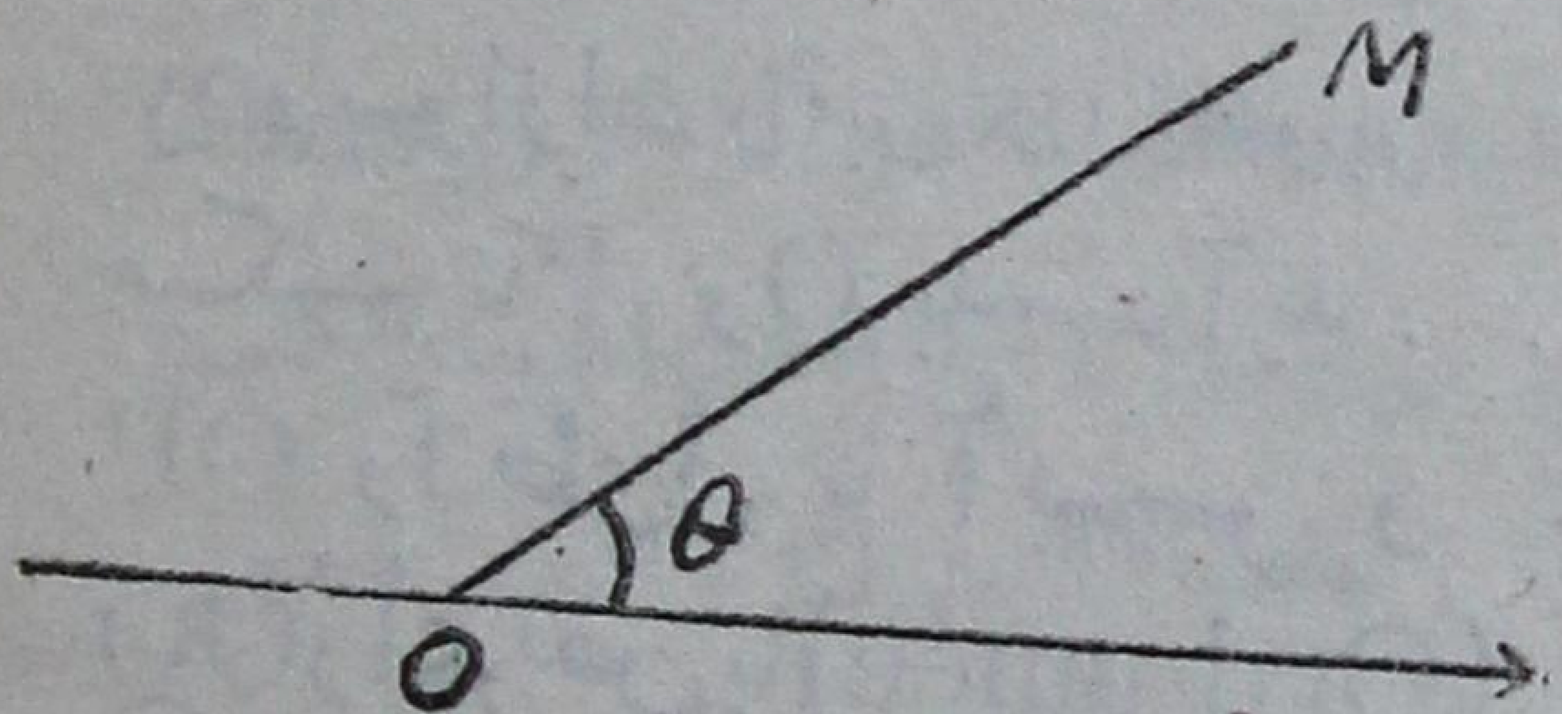



شکل ۲

تبصره - معمولاً محورهای مختصات راعمود برهم اختیار

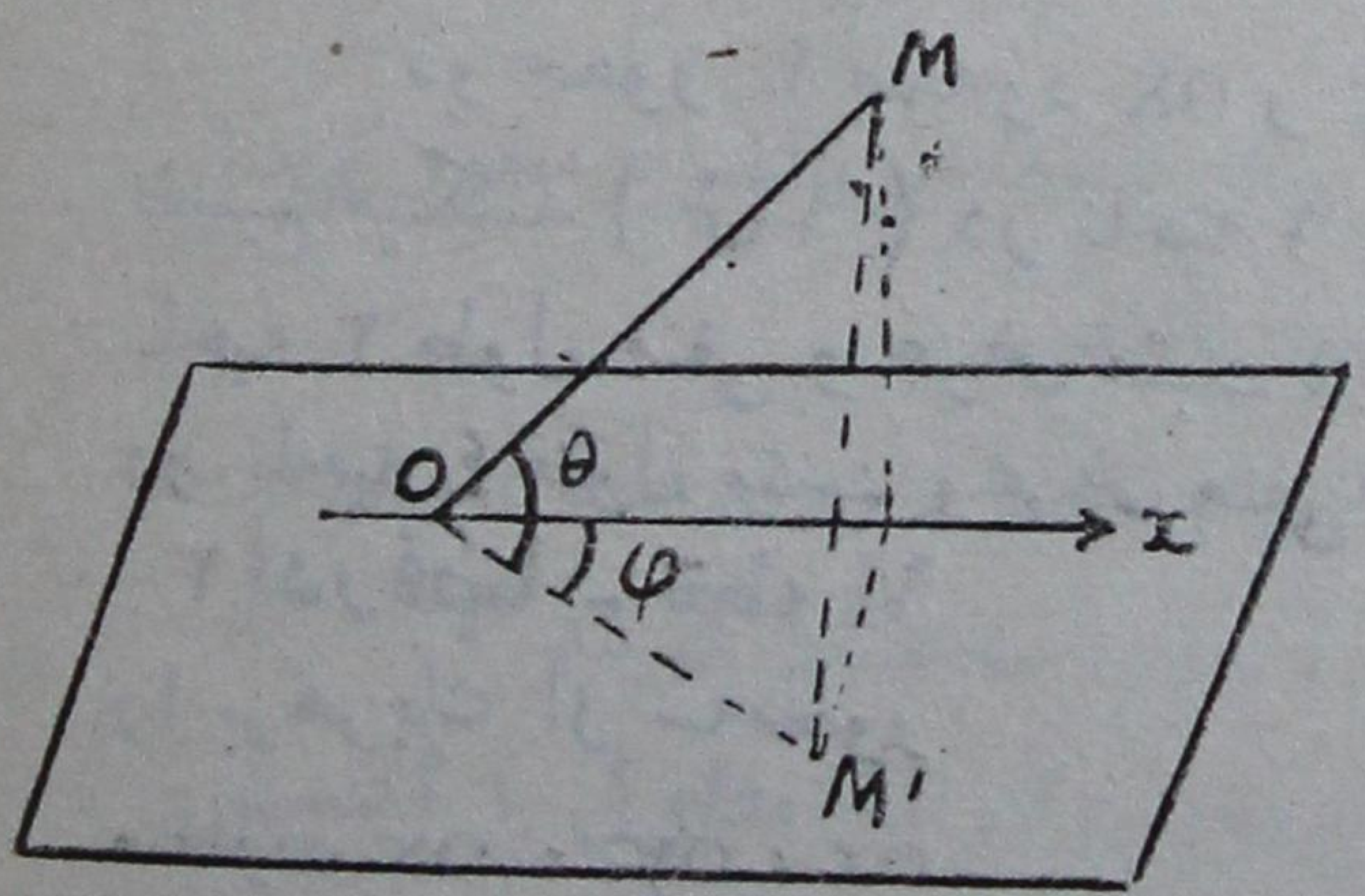
میکنند و مختصات را قائم مینامند.
ما از این پس فقط از مختصات دکارتی قائم صحبت خواهیم کرد.
**قرارداد** - درخواندن مختصات ابتدا طول، بعد عرض و بعد از آن ارتفاع نقطه را میخوانیم و بهمین ترتیب از چپ براست مینویسیم: $M(x . y . z)$

**۱۳۶ - مختصات قطبی**




شکل ۳

**۱) در صفحه** - oM را شعاع حامل و θ زاویه بین oM و جهت مثبت محور را **مدول** مینامند. شعاع حامل را به r (۱) نمایش میدهند (ش ۳)

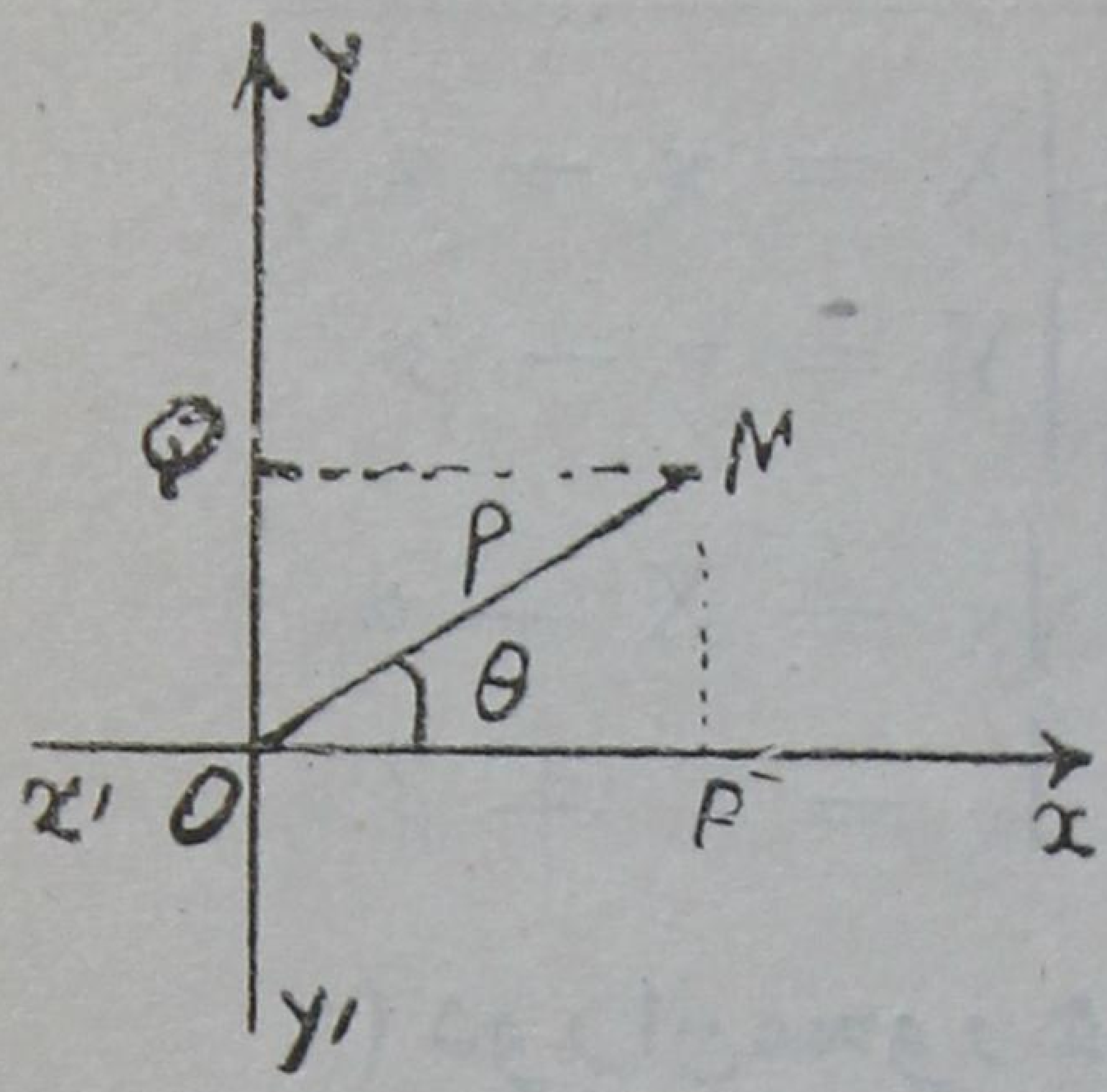



شکل ٤

**۲) درفضا** - در صفحه (P) که بر مبداء O میگذرد محور Ox را اختیار میکنیم. آنگاه شعاع حامل OM را بر صفحهٔ (P) تصویر مینمائیم تا OM' بدست آید
زاویه MOM' را θ و زاویه M'Ox را φ مینامیم.
OM = r و θ و φ مختصات قطبی نقطه M هستند (ش ٤)

**۱۳۷ - بستگی بین مختصات قطبی و مختصات قائم - ۱) درصفحه** - (ش ٥)

(۱) - شعاع حاصل را باحرف یونانی (رو) نمایش میدهند ودرشکل هم همان حرف نوشته شده ولی چون در چاپخانه آنحرف موجود نبود در متن بجای آن r گذاشته شده است



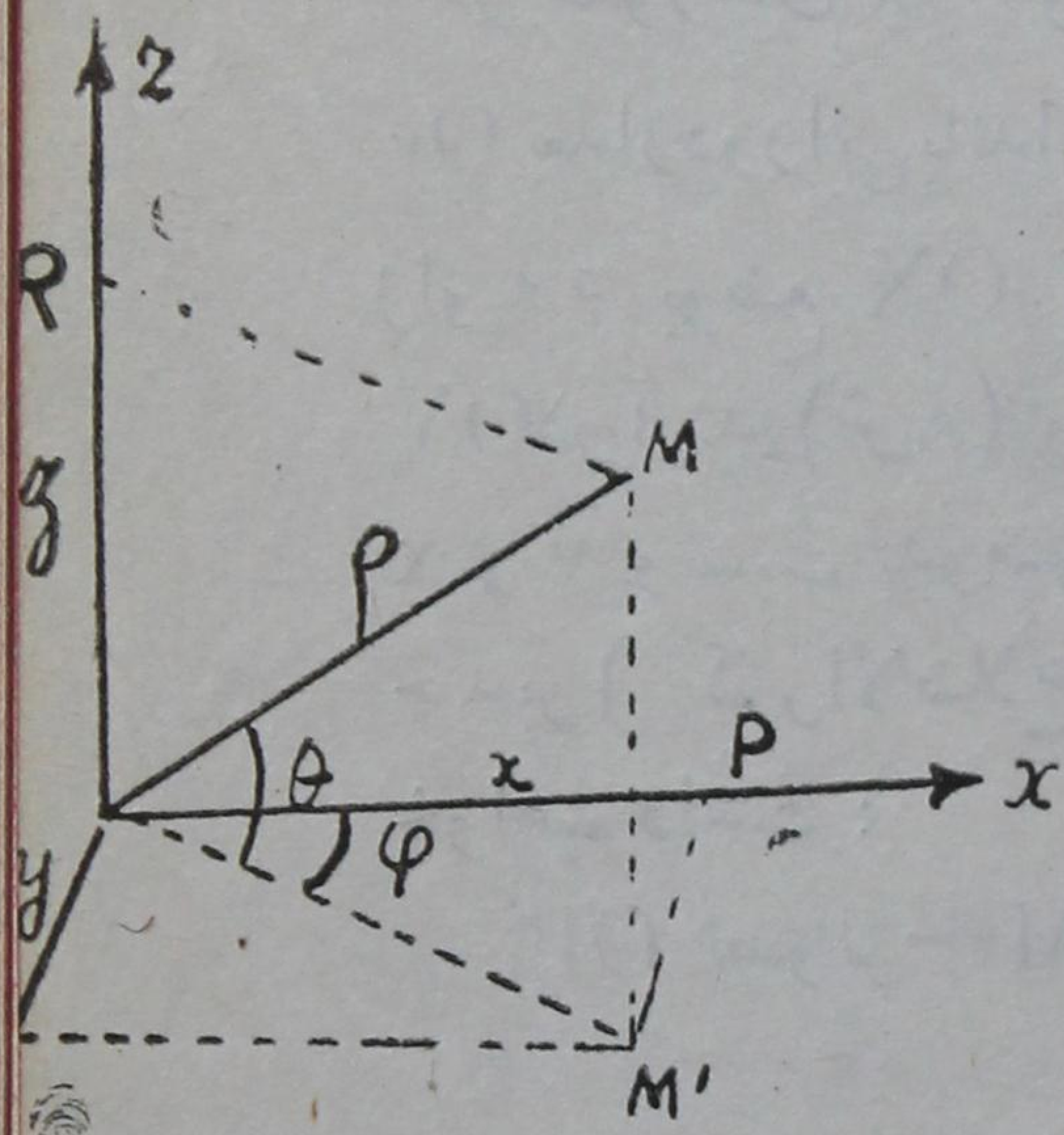
ش ۵

$$\begin{cases} OP = x = r\cos\theta \\ OQ = y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^3 \\ \frac{y}{x} = tg\,\theta \end{cases}$$

**۲ - در فضا (ش۶)**

$$OM' = OM\cos\theta = r\,\mathrm{Cos}\,\theta$$



ش ۶

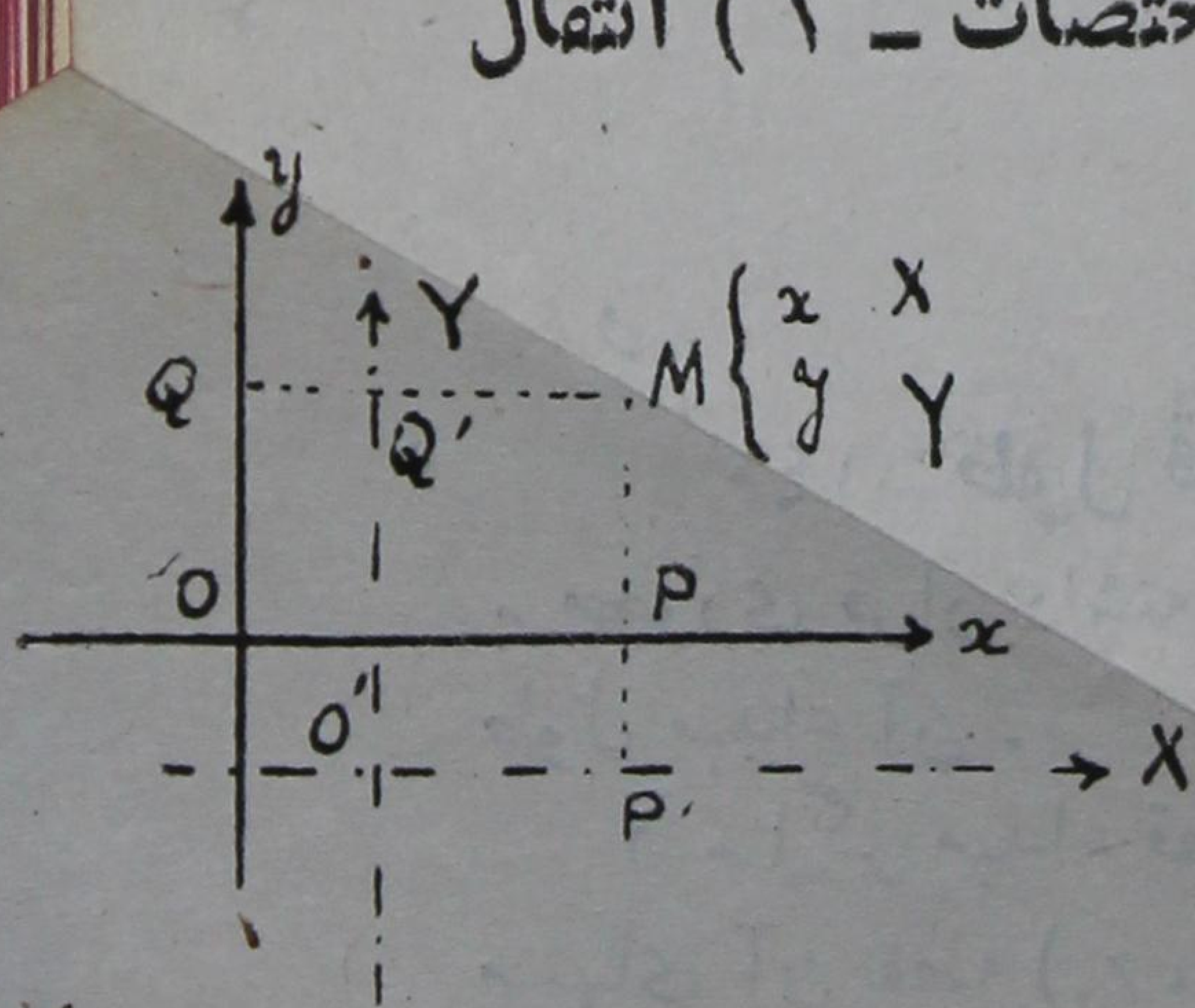
$$\begin{cases} x = OP = r\cos\theta\,\mathrm{Cos}\,\varphi \\ y = OQ = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = OR = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Z^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = tg\,\varphi \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = tg\,\theta \end{cases}$$

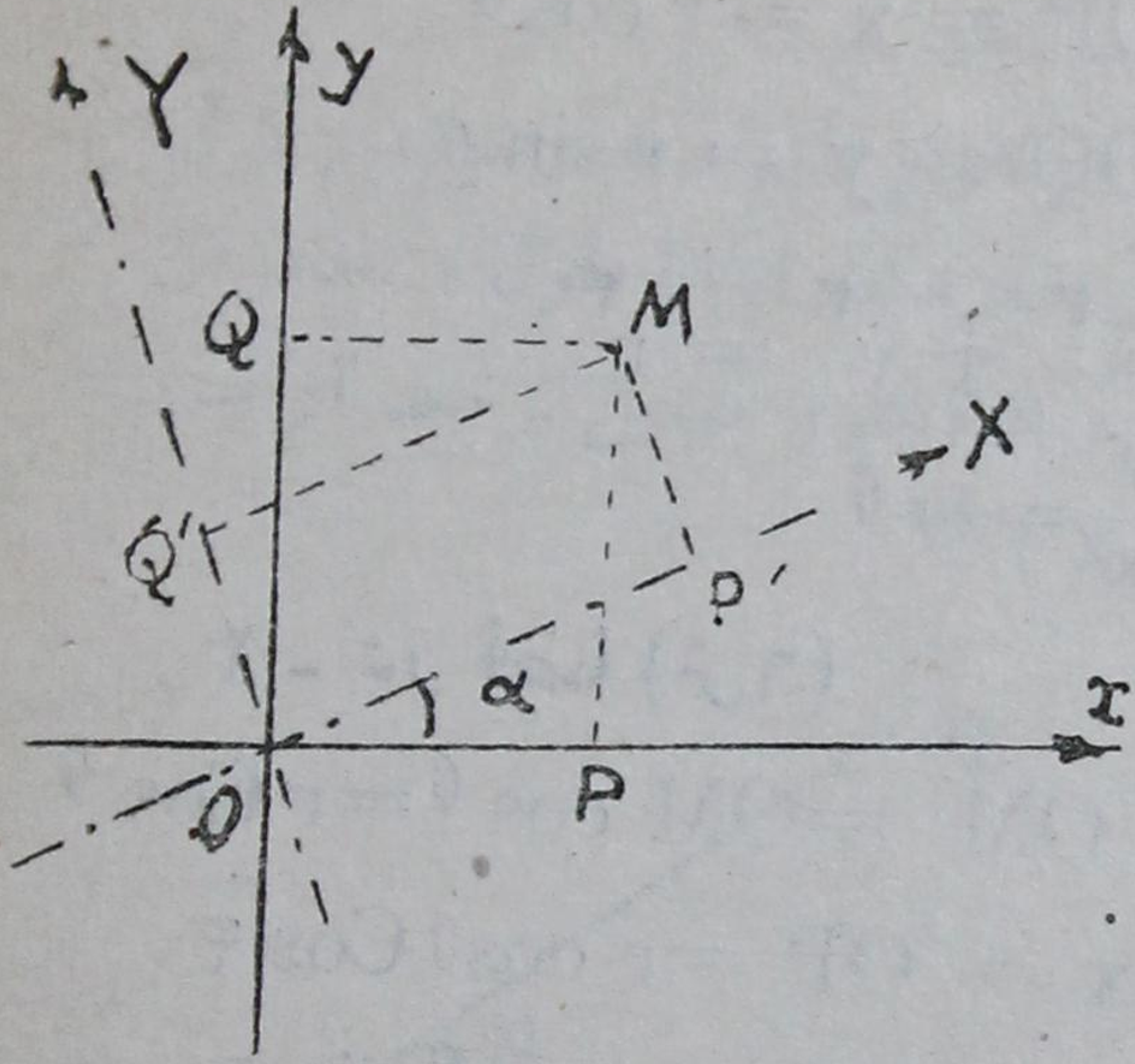
**۱۳۸ - مختصات کروی-**

رجوع شود بقسمت هیئت.

**۱۳۹ - تغییر محور های مختصات ـ ۱ ) انتقال محور ها -** هر گاه محور های مختصات ox و oy را بموازات خودحرکت دهیم تا بوضع O'X و O'Y درآیند (ش ۷) ومختصات نقطه M را نسبت بدو محور اول x و y و نسبت بمحورهای دوم X و Y انگاشته و مختصات نقطه O' را α و β بنامیم



شکل ۷




شکل ۸

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

## ۲) دوران محورها

اگر محورهای Ox و Oy بعداز دورانی باندازه زاویه φ بوضع OX و OY درآیند (ش۸) ومختصات یك نقطه M را نسبت باولیها x و y ونسبت بدومیها X و Y بنامیم ، ازتصویر کردن دورهٔ چندبر ( کثیرالاضلاع ) OPMP بر روی محور مقتضی چنین خواهیم داشت :

تصویر MP' = تصویر OP + تصویر PM + تصویر OP'

$$\begin{cases} X = x \cos\varphi + y\sin\varphi \\ Y = - x \sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

یعنی :

$$\begin{cases} x = X \cos\varphi - Y \sin\varphi \\ y = X \sin\varphi + Y \cos\varphi \end{cases}$$

و

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$$

**۱٤۰ - طول قطعه خط - ۱)** درازی هرقطعه خط که برمحوری قرار داشته باشد برابر است با طول منتها منهای طول مبداء آن .

۲ - اگر مبداء قطعه خطی نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و منتهای آن نقطه $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد :

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

**۱۴۱ - تقسیم قطعه خط به‌نسبت k**

هرگاه نقطه $M\,(X,Y,Z)$ قطعه‌خط $AB$ را که مختصات دوانتهای آن $A\,(x_1 ، y_1 ، z_1)$ و $B\,(x_2 ، y_2 ، z_2)$ باشند به‌نسبت k تقسیم نماید ، یعنی $\frac{MA}{MB} = k$ باشد :

$$M \begin{cases} X = \dfrac{kx_2 + x_1}{k+1} \\ Y = \dfrac{ky_2 + y_1}{k+1} \\ Z = \dfrac{kz_2 + z_1}{k+1} \end{cases}$$

۱۴۲ - تبصره — ۱) اگر M وسط AB باشد $K = 1$ پس مختصات وسط قطعه‌خط واسطهٔ عددی مختصات مبدا و منتهای قطعه‌اند.

۲) مختصات مرکز ثقل مثلث مساوی $\frac{1}{3}$ مجموع مختصات سه رأس آن است.

**۱۴۳ - روابط مهم :**

**الف - رابطه شال** Chasle

۱ - اگر سه نقطه A و B و C برروی یك محور باشند :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

۲ - اگر n نقطه A و B و C و ... و K و L بر روی يك محور باشند .

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LA} = 0$$

یا

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{KL}$$

### ب - رابطه فیثاغورث

اگر دو نقطه A و B بطولهای a و b برروی محوری واقع باشند و M وسط AB باشد ( شماره ٤٥ )

$$OM^2 - AM^2 \equiv OA \times OB$$

### ج — رابطهٔ اولر

اگر سه نقطه A و B و C بطولهای a و b و c برروی محوری فرض شوند ( شماره ٤٦ )

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} \equiv 0$$

### د — رابطهٔ استوارت

اگر سه نقطه A و B و C بطولهای a و b و c برروی محوری فرض شوند ( شماره ٤٧ )

$$\overrightarrow{OA}^2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB}^2 \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC}^2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} \equiv 0$$

ه — اگر نقاط A و B و C و D بطولهای a و b و c و d محور ox را بر نسبت توافقی تقسیم نموده باشند :

۱ - $2(ab+cd) = (a+b)(c+d)$

۲ - اگر O وسط AB فرض شود : $a - = b = -a$

و $a^{۲} = cd$

۳ — اگر O برروی A فرض شود : $a = ۰$

و $\frac{۲}{b} = \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d}$

## XXIII ـ متغیر و تابع

۱٤٤ — هرچیز تغییر پذیر را **متغیر** گویند .

۱٤٥ — **تابع** ـ اگرمابین دو متغیر رابطه‌ای موجود باشد بطوریکه تغییر یکی بستگی بتغییر دیگری داشته باشد دومی را متغیر اصلی و اولی را متغیر تابع یا تابع میگویند .

دربیان رابطه دو متغیر هریك را میتوان بدون تفاوت تابع دیگری دانست .

تابع باینصورت نمایش داده میشود : $y = f(x)$

۱٤٦ — **تعریف** ـ اگر درتابع $y = f(u)$ ، u خود تابعی از x باشد y را **تابع تابع x** نامند .

۱٤۷ — **تابع معین** آنستکه بازاء جمیع مقادیریکه بمتغیر داده‌شوند دارای مقدار معینی باشد ( یعنی موهوم یا مبهم یا ∞ نباشد )

۱٤۸ — **تابع اتصالی** ـ تابع $y = f(x)$ را بازاء $x = a$ اتصالی گویند بشرط آنکه $y = f(a)$ مقداری معین باشد .

۱٤۹ — **تابع انفصالی** ـ تابع $y = f(x)$ را

بازاء $x=a$ انفصالی گویند اگر $f(a)$ مقدار معینی نباشد .

**توضیح** - توابع معین همیشه اتصالی هستند و توابع نامعین بازاء مقادیری از متغیر که تابع نامعین است انفصالی میباشند .

۱۵۰ — **تابع صعودی** - تابع را صعودی گویند اگر تابع و متغیر باهم بالا وپائین بروند . مثلا قیمت پارچه تابع صعودی طول آنست .

۱۵۱ — **تابع نزولی** - تابع را نزولی گویند وقتی که جهت تغییرات تابع و متغیر مخالف باشد مثلاً مدت لازم برای ساختمان یك بنا تابع نزولی تعداد کارگرانیست که بکار گمارده میشوند .

۱۵۲ — تابع را **متناوب** گویند اگر بازاء مقادیر متعددی از متغیر که تفاضل هردو مقدار متوالی آنها مقدار ثابتی باشد تابع یك مقدار احراز نماید این تفاضل ثابت را **دوره تناوب** گویند. مثلاً $y=\sin x$ تابع متناوبی است که $2\pi$ دوره تناوب آنست .

## XXIV _ حدود

۱۵۳ - هرگاه متغیری حین تغییر بعدد معینی نزدیك شده ولی هیچگاه مساوی آن نگردد آن عدد را حد متغیر گویند. اگر متغیر ازحد کوچکتر باشد حد را فوقانی و گرنه تحتانی نامند. مثال : محیط دایره حد فوقانی محیط کثیرالاضلاع محاطی وحد تحتانی محیط کثیرالاضلاع محیطی است وقتی عدد اضلاع آنها

بی‌نهایت زیاد شود. بعبارت دیگر عدد m حد متغیر x است درصورتیکه قدرمطلق $(x - m)$ ازهر عدد مثبت کوچکی کوچکتر شود وقتیکه x بینهایت به m نزدیک گردد.

## ۱۵۴ - خواص حدود

۱ - حد مجموع جبری چند تابع از متغیرx، وقتی که x بسمت حدی میل نماید،مساوی‌است بامجموع حدود آنها.

۲ - حد حاصل ضرب چند تابع از متغیرx ،وقتی که x بسمت حدی‌میل نماید،مساوی‌است باحاصلضرب حدود آنها.

۳ - حد خارج‌قسمت دوتابع از متغیر x،وقتی که x بسمت حدی‌میل‌نماید، مساوی است باخارج قسمت حدود آنهابشرط آنکه حد تابع‌مقسوم‌علیه مخالف صفر باشد.

۴ - حد قوه m ام (یا ریشه m ام) یك تابع‌مساوی است باقوه m ام (یا ریشه m ام) حد آن تابع.

۵ -حد کثیرالجمله صحیحی از x بازاء $x = +\infty$ مساوی است با$\infty$ وعلامتش علامت جمله‌ایست که بزرگترین نماینده رادارا باشد.

# XXV - رفع ابهام

۱۵۵ — **تعریف** - اگر تابعی بازاء مقدار معینی از متغیر بیکی ازصورتهای $\frac{0}{0}$ ، $\infty \times 0$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ یا $(\infty - \infty)$ در آیدگویند تابع‌بازاء آنمقدار مبهم است. و پیدا کردن‌مقدار حقیقی تابع را بازاء آنمقدار **رفع ابهام** گویند.

۱۵۶ — **رفع‌ابهام-۱)** صورت $\frac{0}{0}$ درموقعی پیدا می

شود که صورت و مخرج تابع $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ دارای ریشهٔ مشترک a باشند، و برای رفع ابهام باید عامل مشترک $x-a$ را هر چند دفعه که ممکن باشد ازصورت ومخرج حذف نمود.

۲) $\infty\times\cdot$ را میتوان بصورت $\frac{۱}{\cdot}\times\cdot$ یا $\frac{\cdot}{\cdot}$ نوشت.

۳) $\frac{\infty}{\infty}$ را میتوان بصورت $\frac{\frac{۱}{\cdot}}{\frac{۱}{\cdot}}$ یا $\frac{\cdot}{\cdot}$ نوشت

۴) صورت $(\infty-\infty)$ - اگر در تابع $y=f(x)-\varphi(x)$، $f(a)=\infty$ و $\varphi(a)=\infty$ باشد y رادر $\frac{f(x)+\varphi(x)}{f(x)+\varphi(x)}$ ضرب میکنیم تا بصورت $\frac{f^{۲}(x)-\varphi^{۲}(x)}{f(x)+\varphi(x)}$ درآید بعد صورت و مخرج را بر $\varphi^{۲}(x)\,f^{۲}(x)$ تقسیم می نمائیم تا بشود:

$$y=\frac{\frac{۱}{\varphi^{۲}(x)}-\frac{۱}{f^{۲}(x)}}{\frac{۱}{f(x)\varphi^{۲}(x)}+\frac{۱}{\varphi(x)f^{۲}(x)}}$$

این کسر بازاء $x=a$ مساوی $\frac{\cdot}{\cdot}$ است.

۱۵۷ — **نتیجه** - مقدار حقیقی کسر $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازاء

$x = \pm\infty$ :

۱ — اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد ،

$\pm\infty$ است

۲ — اگر درجه صورت مساوی درجه مخرج باشد مساوی است باخارج قسمت ضرایب جملی که دارای بزرگترین نما هستند .

۳ — اگردرجه صورت از مخرج کوچکتر باشدمساوی صفر است .

## XXVI - مشتقات

۱۵۸ — **تعریف** - اگر متغیر $x$ از مقدار $x_1$ تامقدار $x_2$ تغییر کندمیگویند باندازه $(x_2 - x_1)$ نمو کرده است و این نمو را با علامت $\Delta x$ نشان میدهد .

درتابع $y = f(x)$ بازاء هرنمو $\Delta x$ تابع نموی‌مانند $\Delta y$ خواهد داشت .

۱۵۹ — **تعریف** - مشتق تابع $y = f(x)$ عبارتست از حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتیکه $\Delta x$ میل کند بسمت صفر .

مشتق تابع $y = f(x)$ را به $y'$ یا $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نمایش میدهند .

۱۶۰ — **مشتقات متوالی** - چون مشتق هر تابع‌خود تابعی از متغیر میباشد ممکن است از آنهم مشتق گرفت . این

مشتق را مشتق دوم تابع اصلی گویند. بهمین طریق ممکن است مشتق سوم وچهارم و . . . و m ام گرفت.

**۱۶۱ — مشتق تابع تابع** - درتابع تابع $y=f(u)$ که $u=\varphi(x)$، ممکن است مشتق y را برحسب u یا برحسب x بدست آورد و بین آنها این رابطه برقراراست:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

## ۱۶۲ — محاسبه مشتق وخواص آن

۱ — مشتق مقادیر ثابت صفر است.

۲ — مشتق مجموع چند تابع:

$$\begin{cases} y = u + v - w \\ y' = u' + v' - w' \end{cases}$$

۳ — مشتق حاصلضرب چند تابع:

$$\begin{cases} y = u.v \\ y' = uv' + vu' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = u.v.w \\ y' = u'vw + v'uw + w'uv \end{cases}$$

۴ - مشتق خارج قسمت دوتابع:

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{v} \\ y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2} \end{cases}$$

۵ - مشتق قوهٔ m ام یك تابع

$$\begin{cases} y = u^{m} \\ y' = m u' u^{m-1} \end{cases}$$

۶ ـ مشتق ریشه m ام یك تابع

$$\begin{cases} y = \sqrt[m]{u^{n}} \\ y' = \frac{n}{m} u' \times \frac{1}{\sqrt[m]{u^{m-n}}} \end{cases}$$

## ۱۶۳ — مشتق توابع متداول

۱ ـ $y = C$ $\qquad y' = 0$

۲ ـ $y = x$ $\qquad y' = 1$

۳ ـ $y = x^{m}$ $\qquad y' = mx^{m-1}$

۴ ـ $y = ax^{m}$ $\qquad y' = amx^{m-1}$

۵ ـ $y = \frac{1}{x}$ $\qquad y' = -\frac{1}{x^{2}}$

۶ ـ $y = \frac{a}{x^{m}}$ $\qquad y' = -\frac{am}{x^{m+1}}$

۷ ـ $y = \sqrt{x}$ $\qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۸ ـ $y = \sqrt[m]{x}$ $\qquad y' = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$

مشتق توابع مستدیره :

٩ - $y = \sin x$ $\quad y' = \cos x$

١٠ - $y = \cos x$ $\quad y' = -\sin x$

١١ - $y = tg x$ $\quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

١٢ - $y = \cot x$ $\quad y = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$

١٣ - $x = \sin u$ $\quad y = u' \cos u$

١٤ - $y = \cos u$ $\quad y' = -u' . \sin u$

١٥ - $y = tg u$ $\quad y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

١٦ - $y = \sin^2 x$ $\quad y' = 2 \sin \cos x = \sin 2x$

١٧ - $y = \cos^2 x$ $\quad y' = -2 \cos \sin x = -\sin 2x$

١٨ - $y = \sin(mx + \alpha)$ $\quad y' = m \cos(mx + \alpha)$

١٩ - $y = \cos(mx + \alpha)$ $\quad y' = -m \sin(mx + \alpha)$

٢٠ - $y = tg(mx + \alpha)$ $\quad y' = \frac{m}{\cos^2(mx + \alpha)}$

٢١ - $y = \cot g(mx + \alpha)$ $\quad y' = -\frac{m}{\sin^2(mx + \alpha)}$

٢٢ - $y = \arcsin x$ $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

٢٣ - $y = \arccos x$ $\quad y' = \frac{1}{-\sqrt{1 - x^2}}$

۲۴ - $y = \operatorname{arctg} x \qquad y' = \frac{۱}{۱ + x^۲}$ .

۲۵ - $y = \operatorname{arc\,cotg} x \qquad y' = -\frac{۱}{۱ + x^۲}$

## خواص مشتق

۱۶۴ — مشتق تابع صعودی مثبت و مشتق تابع نزولی منفی است .

۱۶۵ — مشتق تابع بازاء طول نقاط ماکزیمم و مینیمم صفر است .

۱۶۶ — طول نقطهٔ عطف منحنی نمایش یك تابع ریشه مشتق ثانی آن تابع است .

## رفع ابهام بوسیله مشتق

۱۶۷ — اگر در کسر $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ، $f(a) = ۰$ و $\varphi(a) = ۰$ باشد مقدار حقیقی آن مساوی است با مقدار حقیقی خارج قسمت مشتقات صورت و مخرج کسر بازاء $x = a$

**مثال** - مقدار حقیقی کسر

$$\frac{f(x)}{\varphi(y)} = \frac{x^۴ - ۵x^۳ + ۹x^۲ - ۷x + ۲}{x^۴ - ۶x^۳ + ۱۲x^۲ - ۱۰x + ۳}$$

را بازاء $x = ۱$ باید تعین کرد.

حل - از $f(x)$ و $\varphi(x)$ مشتق میگیریم

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{۴x^۳ - ۱۵x^۲ + ۱۸x - ۷}{۴x^۳ - ۱۸x^۲ + ۲۴x - ۱۰}$$

چون این کسرهم بازاء ۱ $=x$ مساوی $\frac{\cdot}{\cdot}$ است باردیگر

از $f'(x)$ و $\varphi'(x)$ مشتق بگیریم ؛

$$\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\frac{۱۲x^{۲}-۳۰x+۱۸}{۱۲x^{۲}-۳٦x+۲٤}$$

مقدار این کسر نیز بازا ۱ $=x$ $\frac{\cdot}{\cdot}$ است، باردیگراز

$f''(x)$ و $\varphi''(x)$ مشتق میگیریم

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)}=\frac{۲٤x-۳۰}{۲٤x-۳٦}$$

مقدار این کسر بازاء ۱ $=x$ مساوی $\frac{۱}{۲}$ است بنا براین

مقدار حقیقی $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازاء ۱ $=x$ نیز $\frac{۱}{۲}$ است .

## XVVII- تغییرات توابع

**۱٦۸ - تعریف** — مقصود از تعیین تغییرات تابع $y=f(x)$ تحقیق درجهت تغییرات آن تابع است بازاء مقادیر مختلف $x$ وقتیکه $x$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ، یعنی تعیین آنکه تابع درچه فواصلی صعودی و درچه فواصلی نزولی است و بازاء چه مقادیری از $x$ ماکزیمم یا می نیمم یا مساوی صفر میباشد.

**۱٦۹ - تغییرات تابع درجه اول $y=ax+b$**

وقتی $x$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر نماید تغییرات تابع $y$ بستگی بعلامت $a$ دارد ، اگر $a$ مثبت باشد تابع صعودی و اگر منفی باشد تابع نزولی است .

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$: $a>0$ | $-\infty$ | $\nearrow$ ۰ $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y$: $a<0$ | $+\infty$ | $\searrow$ ۰ $\searrow$ | $-\infty$ |

# ماکزیمم و می نیمم

۱۷۰ - **تعریف** - اگر تابع $y=f(x)$ بازاء $x=a$ اتصالی بوده و بازاء $x=a-\varepsilon$ ($\varepsilon$ مقداریست مثبت و بی نهایت کوچك) صعودی و بازاء $x=a+\varepsilon$ نزولی باشد میگویند تابع بازاء $x=a$ **ماکزیمم** است ؛ و هرگاه تابع بازاء $x=a-\varepsilon$ نزولی و بازاء $x=a+\varepsilon$ صعودی باشد گویند تابع بازاء $x=a$ **می نیمم** میباشد.

**۱۷۱ - تعیین ماکزیمم و می نیمم بوسیلهٔ مشتق** - برای بدست آوردن ماکزیمم و می نیمم تابعی مشتق آن را مساوی صفر قرار میدهیم و جواب های آنرا بجای $x$ در تابع میگذاریم. مقداری که برای $y$ بدست میآید ماکزیمم است هرگاه تابع قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد و می نیمم است هرگاه تابع پیش از آن نزولی و بعد از آن صعودی باشد (شماره ۱۶۵)

**۱۷۲ - طریقه مستقیم برای تعیین ماکزیمم و می نیمم بعضی توابع** - ممکنست بدون استعمال مشتق در بعضی از توابع مقدار ماکزیمم یا می نیمم را مستقیما بدست آورد. این امر در مواردی ممکنست که هرگاه تابع $y=f(x)$ را برحسب قوای نزولی $x$ مرتب نمائیم و $y$ را پارامتر فرض کنیم بتوان برای معادلهٔ اخیر ریشهٔ مضاعف بدست آورد ؛ در اینصورت مقادیری

از پارامتر y که بازاء آنها معادله ریشهٔ مضاعف پیدا کند ماکزیمم یا می نیمم تابع هستند.

**مثال** - تابع $y=\frac{x^{۲}+۲x-۳}{x^{۲}-۲x+۳}$ را نسبت به $x$ مرتب می کنیم.

$$(y-۱)x^{۲}-۲(y+۱)x+۳(y+۱)=۰ \quad (۱)$$

معادله (۱) بازاء

$$\Delta=(y+۱)^{۲}-۳(y+۱)(y-۱)=۰ \quad (۲)$$

ریشهٔ مضاعف دارد و $y_{۱}=-۱$ و $y_{۲}=۲$ ریشه‌های معادلهٔ (۲) ماکزیمم و می نیمم تابع مذکور میباشند.

## ۱۷۳ - ماکزیمم و می نیمم مطلق

ا - اگر حاصل‌جمع چند عدد مثبت ثابت باشد حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که همه آن اعداد باهم مساوی باشند.

ب - اگر حاصل‌ضرب چند عدد مثبت ثابت باشد مجموع آنها موقعی می نیمم است که همه آنها باهم مساوی باشند.

## ۱۷۴ - تغییرات تابع درجهٔ دوم $y=ax^{۲}+bx+c$

تابع را میتوان بصورت

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}-\frac{b^{۲}-٤ac}{٤a^{۲}}\right]$$

نوشت (شمارهٔ ۷۲)

حال چون $x$ از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند قدر مطلق تغییرات y بستگی به تغییرات $\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}$ وجهت تغییرات آن بستگی

بعلامت a دارد . این تغییرات را میتوان درجدول ذیل( که درآن $M=\frac{4ac-b^2}{4a}$ فرض شده است) خلاصه کرد :

| $x$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{b}{2a}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+\frac{b}{2a}$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+M$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{M}{a}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y$, $a>0$ | $+\infty$ | $\searrow$ | M می نیمم | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y$, $a<0$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | M ماکزیمم | $\searrow$ | $-\infty$ |

اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ در دو طرف $-\frac{b}{2a}$ قرار داشته وبازاء آنها تابع صفر است .

## ۱۷۵ - تغییرات تابع دومجذوری $y=ax^4+bx^2+c$

تابع را میتوان بصورت $y=a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$ نوشت و تغییرات آن وقتی که $x$ از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند درجدول ذیل خلاصه میشود $\left(M=\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | | $-\infty$ | ↗ | $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ | ↗ | $+\infty$ |
| $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ | $\frac{b}{a}<0$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{b^2}{4a^2}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |
| | $\frac{b}{a}>0$ | $+\infty$ | | ↘ | | $\frac{b^2}{4a^2}$ | | ↗ | | $+\infty$ |
| y, $a>0$ | $b>0$ | $+\infty$ | | ↘ | | c مینیمم | | ↗ | | $+\infty$ |
| | $b<0$ | $+\infty$ | ↘ | M مینیمم | ↗ | c ماکزیمم | ↘ | M مینیمم | ↗ | $+\infty$ |
| y, $a<0$ | $b>0$ | $-\infty$ | ↗ | M ماکزیمم | ↘ | c مینیمم | ↗ | M ماکزیمم | ↘ | $-\infty$ |
| | $b<0$ | $-\infty$ | | ↗ | | c ماکزیمم | | ↘ | | $-\infty$ |

در صورتیکه $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ باشند چهار ریشهٔ معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ در دوطرف $\mp\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ قرار می گیرند و تابع بازاء آنها صفر است . هرگاه $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}<0$ باشند دو ریشه معادله یکی طرف چپ $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و دومی طرف راست $+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ قرار میگیرند .

## XXVIII — نمایش هندسی توابع

**۱۷۶ - تعریف ۱** - در تابع $y = f(x)$ بازاء هرمقدار $x$ مقداری برای $y$ پیدا میشود . چون این دومقدار را مختصات نقطه‌ای مانند M فرض کنیم نسبت بدو محور عمود برهم $x'ox$ و $y'oy$ وضع آن نقطه را میتوان مشخص کرد . چون $x$ ، ودرنتیجه $y$، تغییر کنند M درصفحه تغییر جا میدهد و ازحرکت آن یك منحنی پدید می آید . این منحنی را منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ میگویند .

پس هر نقطه که بر منحنی باشد مختصاتش در رابطهٔ $y=f(x)$ صدق میکند و هر نقطه که مختصاتش در آن رابطه صدق کند برروی منحنی است .

**تعریف ۲** - منحنی مکان هندسی نقاطی است که بر حسب قاعدهٔ معینی ، در صفحه یا در فضا ، تغییر مکان دهند . رابطه‌ای که این قاعده را بیان می کند معادلهٔ منحنی است .

### نمایش تغییرات تابع درجهٔ اول $ax+by+c=0$

۱۷۷ - **قضیه** - منحنی نمایش تغییرات تابع درجه اول خطی است مستقیم .

۱۷۸ - **قضیه** - مختصات نقاط هرخط مستقیم در معادله درجه اول $ax+by+c=0$ صدق میکند .

۱۷۹ - **قضیه** - در هرسه‌جمله درجه اول $ax+by+c=0$:

**اولا** : ا ) هرگاه $a=0$ باشد ، $by+c=0$ یا $y=-\frac{c}{b}$ . منحنی نمایش $y$ خطی است موازی محور $x$ ها .

ب) معادلهٔ هرخط که‌موازی محور $x$ها باشد $y=d$ است ،

**ثانیا**: ا) هرگاه $b=0$ باشد ، $x=-\frac{c}{a}$ . منحنی نمایش $x$ خطی است موازی محور $y$ ها .

ب) معادلهٔ هرخط موازی محور $y$ ها $x=e$ است .

**ثالثا** : ا ) اگر $c=0$ باشد $y=-\frac{a}{b}x$ ؛ منحنی خطی است که بر $O$ ، مبداء مختصات ، میگذرد .

ب ) معادلهٔ هر خط که بر مبداء مختصات بگذرد $y=mx$ است .

**رابعا** : اگر $a$ و $b$ و $c$ مخالف صفر باشندخط محورها رادر دو نقطه قطع میکند و معادله آن بصورت $y=mx+n$ است . در اینصورت $m$ **ضریب زاویه‌ای** و $n$ **عرض ازمبداء** خط است .

۱۸۰ - **ضریب‌زاویه‌ای** هرخط تانژانت زاویه ایست که این خط باجهت مثبت محور $x$ ها تشکیل میدهد . پس ضریب

زاویه‌ای خطوط موازی محور $x$ ها صفر و از آن خطوط موازی محور yها $\infty$ است.

**۱۸۱- زاویهٔ دو خط** - اگر m و m' ضریب زاویه ای دوخط $\triangle$ و $\triangle'$ و $\alpha$ زاویه بین آنها باشد:

$$tg\ \alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

**دو خط موازی**: اگر $\alpha = 0$ باشد $m = m'$ یعنی ضرایب زاویه‌های دوخط موازی مساویند.

**دو خط عمود برهم**: اگر $\alpha = \frac{\pi}{2}$ باشد $tg\alpha = \infty$

یعنی $1 + mm' = 0$ پس $m' = -\frac{1}{m}$ یعنی اگر خطی بر خط دیگر عمود باشد ضریب زاویه ایش مساوی عکس ضریب زاویهٔ دیگریست با علامت مخالف.

**۱۸۲- معادلهٔ خطی که بریك نقطه میگذرد** - معادله خط $\triangle$ که با ضریب زاویه‌ای m بر نقطهٔ $M(x', y')$ میگذرد:

$$y - y' = m\ (x - x')$$

**۱۸۳ - معادلهٔ خطی که بر دو نقطه میگذرد** - اگر مختصات دو نقطه را بترتیب $(x', y')$ و $(x'', y'')$ فرض کنیم

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

**حالت مخصوص** - معادله خطی که از نقاط $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ بگذرد:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(a و b را بترتیب طول و عرض از مبدء خط گویند).

۱۸٤ - **فاصله نقطه از خط** - فاصله نقطه $M(x',y')$ ازخطی که معادله‌اش $ax+by+c=\cdot$ میباشد عبارتست از :

$$d=\frac{ax'+by'+c}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

۱۸۵ — **رسم خط** - برای رسم یك خط کافی است مختصات دو نقطه آنرا بدست آوریم . بهتر این است که طول یکی ازاین نقاط و عرض دیگری را صفر انگاشته عرض آن وطول این را ازروی معادله خط بدست آوریم .

۱۸٦ — **فصل مشترك دو خط** - مختصات فصل مشترك دوخط $ax+by+c=\cdot$ و $a'x+b'y+c=\cdot$ جوابهای دستگاه :

$$\begin{cases} ax+by+c=\cdot \\ a'x+b'y+c'=\cdot \end{cases}$$

میباشند، یعنی

$$x=\frac{bc'-cb'}{ab-ba'} \quad \text{و} \quad y=\frac{ca-ac'}{ab'-ba}$$

**مجانبها**

۱۸۷ — **تعریف** - اگر نقطهٔ M بتواند در روی یك منحنی بی نهایت دور شود میگویند این منحنی یك شاخه بی نهایت دارد .

۱۸۸ — **مجانب** - هرگاه خطی مانند $\triangle$ بتوان یافت که فاصله نقطه M منحنی ازآن ، وقتی که M بی نهایت در

روی منحنی دور شود، بسمت صفر میل کند ، خط $\Delta$ را مجانب منحنی گویند .

بعبارت دیگر مجانب خطی است که در بی نهایت بر منحنی مماس شود.

مجانب بر سه قسم است : **افقی** یا موازی محور $x$ ها، **قائم** یا موازی محور $y$ ها ، **مایل**.

**۱۸۹ — مجانب افقی** - هرگاه در تابع $y = f(x)$ وقتی که $x$ بی نهایت بزرگ شود $y$ بسمت مقدار ثابت $a$ میل کند خط $y=a$ را مجانب افقی منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ گویند .

**۱۹۰ — مجانب قائم** - هرگاه درتابع $y = f(x)$ وقتی که $y$ بی نهایت بزرگ شود $x$ بسمت مقدار ثابت $b$ میل کند خط $x=b$ مجانب قائم منحنی است .

**۱۹۱ — مجانب مایل** - اگر خط $y = mx + n$ مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ باشد :

$m$ حد $\frac{y}{x}$ است وقتی که $x$ میل کند بسمت بی نهایت

$n$ حد $y - mx$ است وقتی که $x$ میل کند بسمت بی نهایت.

**۱۹۲ — قاعده عملی برای پیدا کردن مجانبها**

۱) منحنیهائیکه معادلهٔ آنها خطی است ، یعنی کسری یا اصم نیست ، مجانب ندارند .

ب) در تابع کسری $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ برای تعیین مجانبها

باینطریق باید عمل کرد :

۱ — مجانب قائم : معادلهٔ آنها ریشه های $\varphi(x)=0$ است .

۲ — مجانب افقی : معادلهٔ آنها حدکسر $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ است وقتی $x$ میل کند بسوی بی‌نهایت (شماره ۱۵۶)

۳ — مجانب مایل : خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $\varphi(x)$ معادلهٔ مجانب مایل است .

تبصره - اگر درجه $\varphi(x)$ از $f(x)$ زیادتر یا با آن مساوی باشد منحنی مجانب مایل ندارد . اگر درجه $f(x)$ از $\varphi(x)$ یکی بیشتر باشد مجانب خطی مستقیم است . هر گاه اختلاف درجات بیش از یکی باشد مجانب منحنی است .

درمعادلات اصم ( غیر کسری ) مجانب موازی ( قائم‌واقفی ) نیست ومعادلهٔ مجانب مایل پس از تعیین $m$ حد $\frac{y}{x}$ و $n$ حد $y-mx$ وقتی $x$ میل کند بسوی بی‌نهایت بدست میآید .

## تقعر و تحدب

۱۹۳ - **تقعر و تحدب** - اگر مماس مرسوم درنقطه $M$ بر منحنی ، منحنی رادر همان نقطه قطع نکند میگویند منحنی در این نقطه محدب ( یا مقعر ) است . بر حسب آنکه منحنی در مجاورت $M$ بالا یا پائین مماس باشد میگویند تقعر منحنی بطرف $y$ های مثبت یا منفی است و بر حسب آنکه براست یا بچپ مماس باشد تقعر منحنی بطرف $x$ های مثبت یامنفی است.

۱۹۴ - **نقطهٔ عطف** - اگر مماس در $M$ بر منحنی ،

منحنی را درهمان نقطه قطع کند ، منحنی در آن نقطه تغییر جهت تقعر داده است M را نقطهٔ عطف منحنی میگویند .

۱۹۵ - **قضیه** - مشتق دوم هر تابع بازاء طول نقاطی که تقعر منحنی نمایش آن تابع بطرف y های مثبت است مثبت وبازاء طول نقاطی از منحنی که تقعر آن بطرف y های منفی است منفی میباشد .

**نتیجه** - در نقطه عطف مشتق دوم مساوی صفر است .

## تقارن

۱۹۶ - **محور تقارن** - خط $\Delta$ را محور تقارن یك منحنی گویند درصورتیکه اگر خطی برهر نقطه غیر مشخص N از $\Delta$ عمود گردد ومنحنی را در $M'$ و M قطع کند ، N وسط $MM''$ باشد .

**مرکز تقارن** - نقطه $A(\alpha ، \beta)$ را مرکز تقارن منحنی گویند درصورتیکه اگر هرخط غیر مشخص که بر A بگذرد ومنحنی را دردونقطه $M'$ و $M''$ قطع کند ، A وسط $M'M''$ باشد .

۱۹۷ - **تعیین محور تقارن** - برای آنکه بدانیم منحنی نمایش $y = f(x)$ محور تقارن دارد یانه ، و اگر دارد برای بدست آوردن معادله آن ، خط $\Delta$ بمعادله $y = mx + n$ را (که درآن باید پارامتر های m و n را مشخص ساخت) فرض میکنیم و نقطه $A(\alpha$ و $m\alpha + n)$ را بر آن اختیار مینمائیم و از آن خط $y - (m\alpha + n) = -\frac{1}{m}(x - \alpha)$ را بر $\Delta$

عمود کرده $M'$ و $M''$ فصل مشترکهای آنرا بامنحنی $y=f(x)$ بدست می آوریم - اگر $(x', y')$ و $(x'', y'')$ مختصات $M'', M'$ باشند و $\triangle$ محور تقارن باشد چنین خواهیم داشت ؛

$$(۱)\quad \frac{x'+x''}{۲}=\alpha \qquad\qquad (۲)\quad \frac{y'+y''}{۲}=m\alpha+n$$

روابط (۱) و(۲) نباید بستگی به $\alpha$ داشته باشند، پس هرگاه آنها را برحسب $\alpha$ مرتب کنیم باید در هر یك ضریب $\alpha$ و جمله مستقل از $\alpha$ مساوی صفر شوند ۰ باین ترتیب مقادیری برای $m$ و $n$ بدست می آید ۰ اگر مقادیری که از روابط (۱) و (۲) بدست آمده اند با هم مساوی باشند $\triangle$ محور تقارن است ، وگرنه نیست ۰

۱۹۸ - **تعیین مرکز تقارن** - برای تعیین آنکه منحنی $y = f(x)$ مرکز تقارن دارد نقطه $M(\alpha,\beta)$ را، که در آن $\alpha$ و $\beta$ بعداً تعیین خواهند شد، اختیار می کنیم وخط $y-\beta= m(x-\alpha)$ را بر آن مرور داده محل برخورد آن را با $y = f(x)$ بدست میآوریم ۰ اگر $A(x',y')$ و $B(x'',y'')$ نقاط تقاطع و $M$ مرکز تقارن باشند :

$$(۱)\quad \frac{x'+x''}{۲}=\alpha \qquad \text{و} \qquad (۲)\quad \frac{y'+y''}{۲}=\beta$$

روابط (۱) و (۲) باید از $m$ مستقل باشند پس باید ضرایب قوای مختلفه $m$ درآنها مساوی صفر شوند ۰ از بیان این شرط دررابطه (۱) برای $\alpha$ و $\beta$ مقادیری بدست می آید، اگراین

مقادیر ضرایب قوای مختلفه m را در رابطه (۲) نیز صفر کنند منحنی مرکز تقارن دارد ومقادیری که برای $\alpha$ و $\beta$ بدست آمده اند مختصات این مرکزند.

**۱۹۹ - قضیه** - اگر یك منحنی دو محور تقارن عمود برهم داشته باشد محل تقاطع آنها مرکزتقارن منحنی است.

## مماس بر منحنی

**۲۰۰ - مماس** - اگر خطی منحنی $y=f(x)$ را در $M'$ و $M''$ قطع کند سپس در حول $M'$ آنقدر بچرخد که $M''$ بی نهایت به $M'$ نزدیك شود حد خط را مماس بر منحنی در نقطه $M'$ گویند.

**۲۰۱ - ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی** $y=(fx)$ در نقطه ای بطول $a$ عبارتست از مقدار مشتق $y'=f'(x)$ بازاء $x=a$.

**۲۰۲ - رسم مماس بر منحنی** $y=f(x)$

۱) معادله مماس برمنحنی که بر نقطهٔ M بطول a واقع برمنحنی می گذرد عبارتست از $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

۲) معادله مماسی که از نقطه $M(\alpha\beta)$ واقع در خارج منحنی بر منحنی رسم شود بدو قاعده بدست میآید.

**قاعدهٔ اول**: تعیین ضریب زاویه ای مماس — معادله کلی خطوطی را که بر $M(\alpha,\beta)$ میگذرند مینویسیم:

$y-\beta=m(x-\alpha)$ ؛ آنگاه آن را با معادله منحنی $y=f(x)$ حل میکنیم ؛ شرط آنکه خط برمنحنی مماس باشد اینست که

دستگاه یك ریشه مضاعف داشته باشد. مقداری از $m$ که بازاء آن ریشه مضاعف بدست میآید ضریب زاویه‌ای مماس است.

**قاعدهٔ دوم** - تعیین طول نقطه تماس - معادله کلی مماس بر نقطه‌ای از منحنی بمختصات $[a، f(a)]$ را می‌نویسیم:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

بعد بجای $x$ و $y$ مقادیر $\alpha$ و $\beta$ را میگذاریم و $a$ یعنی طول نقطه تماس را بدست میآوریم.

**رسم منحنی**

۲۰۳ - برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ باینطریق عمل میکنیم:

۱) ریشه‌های $f(x) = ۰$ را بدست می‌آوریم. ۲) مقدار $y$ را بازاء $x = \mp\infty$ معین میکنیم.

۳) معادلات مجانبها را تعیین مینمائیم ٤) بوسیله مشتق طول و عرض نقاط ماکزیمم و می‌نیمم را معلوم میکنیم.

۵) با مشتق درم طول نقطه عطف را معین می کنیم.

٦) جدول نمایش تغییرات را ترتیب میدهیم. ۷) نسبت بدو محور متعامد نخست مجانبها را میسازیم و بعد بکمك نقاطی که در جدول تغییرات ثبت شده اند و با مراعات جهت تغییرات منحنی را رسم میکنیم. اینك چند مثال:

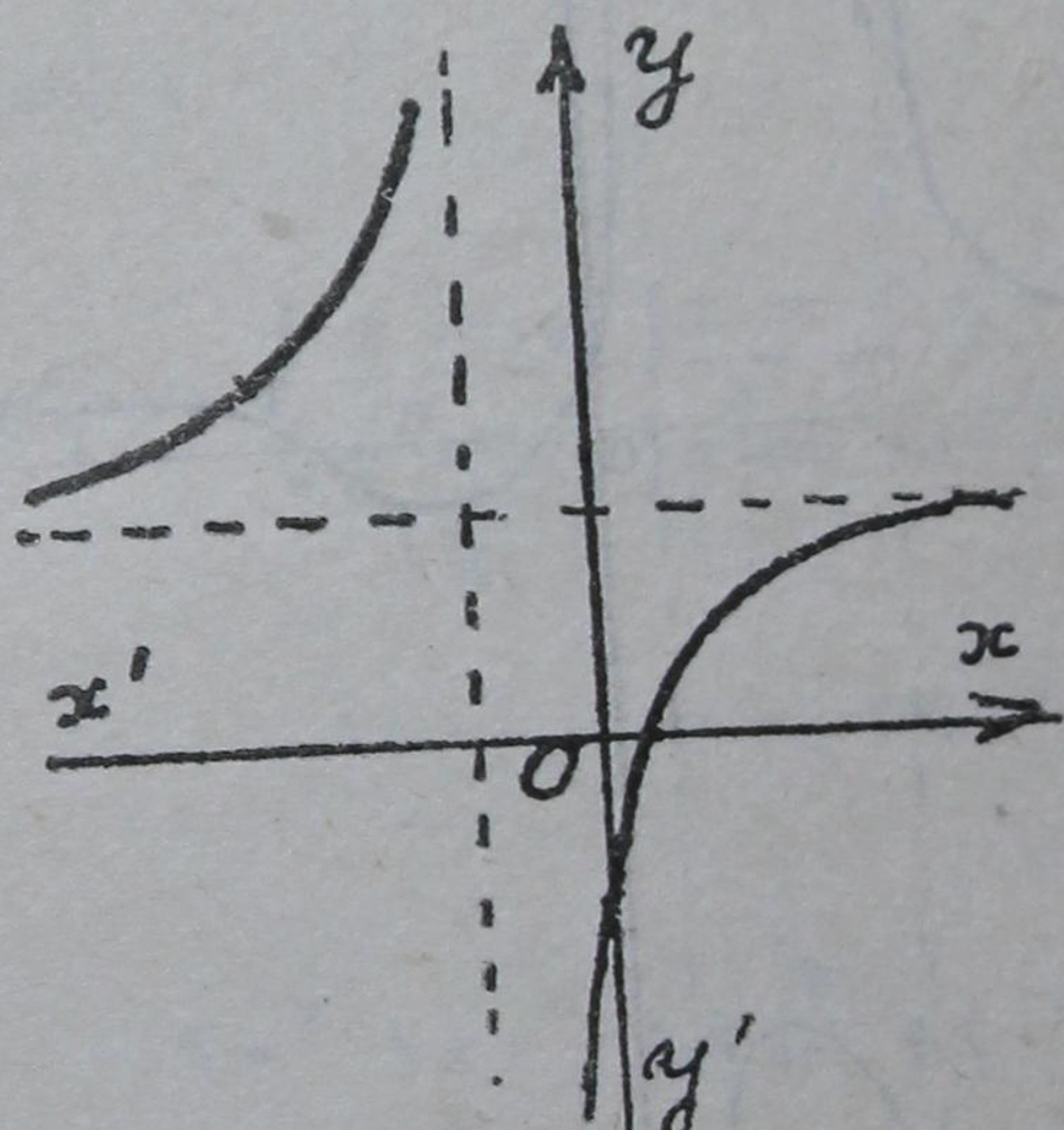
**مثال ۱** - رسم منحنی تابع هموگرافیک $y = \dfrac{۲x - ۱}{x + ۱}$

$x = ۰ ، y = -۱$ $\qquad$ $y = ۰ ، x = \dfrac{۱}{۲}$

$x=\infty \quad , \quad y=2$ $\qquad\qquad$ $x=-1 \quad , \quad y=\infty$

$y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ همیشه مثبت است

| x | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | + | + | + | + | |
| y | $2 \nearrow +\infty$ | $-\infty \nearrow$ | $-1 \nearrow$ | $0 \nearrow$ | $2$ |




مثال ٢ - تغییرات تابع $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}$

$$y'=\frac{10(x^2-4)}{(x^2+5x+4)^2}=0 \qquad \begin{cases} x=+2 \\ y=-\frac{1}{9} \end{cases} \text{ و } \begin{matrix} x=-2 \\ y=-9 \end{matrix}$$

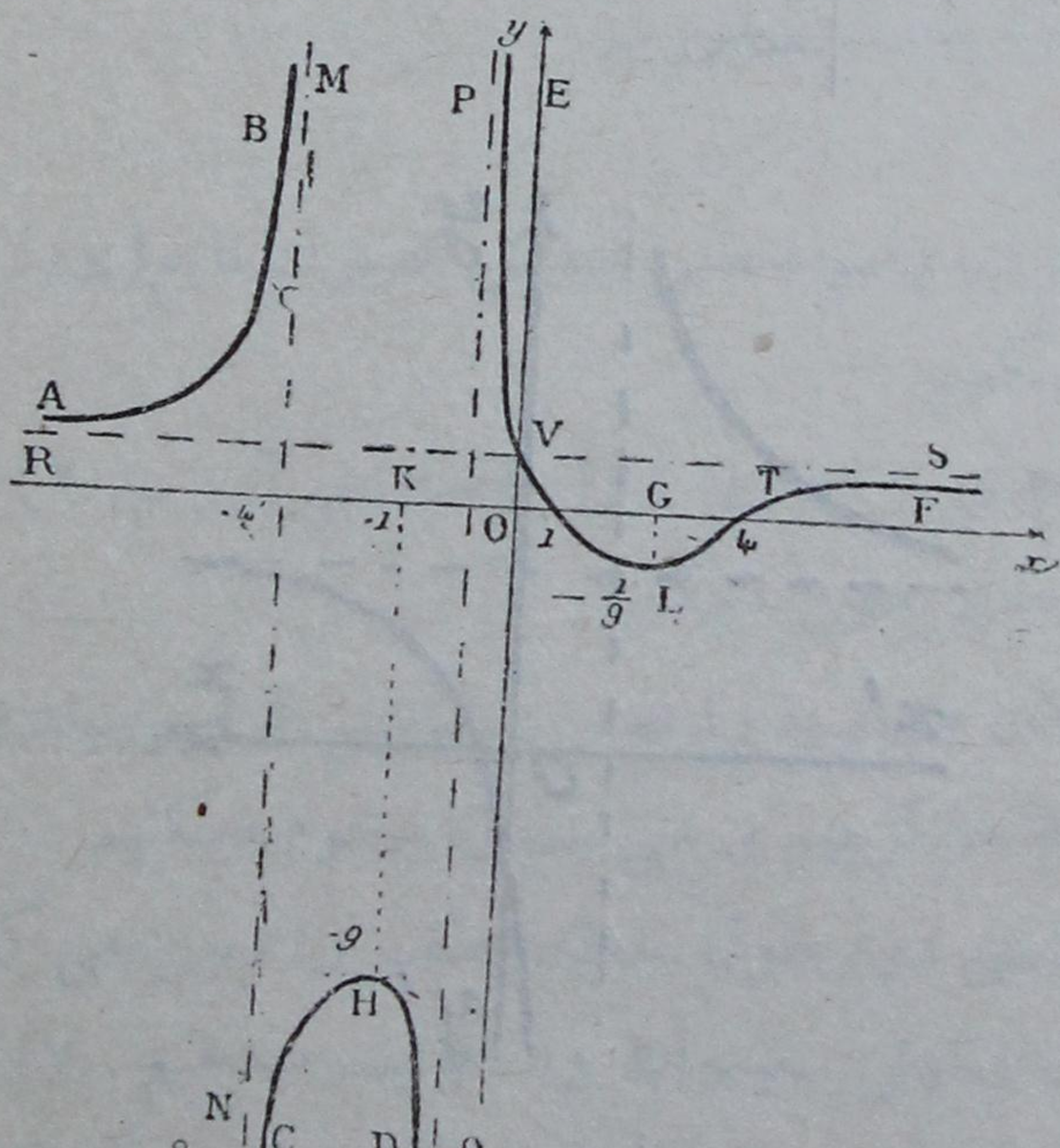
$y=0$ $\qquad$ $x=4$ و $x=1$

$y=\infty$ $\qquad$ $x=-4$ و $x=-1$

$$x=\infty \qquad y=1$$

$$x=0 \qquad y=1$$

| u | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | | | | $0$ | | $+$ | | |
| y | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty \mid -\infty$ | $\nearrow$ | $-9$ | $\searrow$ | $-\infty \mid +\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{9}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |




مثال ۳ - مطلوبست رسم منحنی $y=\frac{\cos 3x}{1+\cos 2x}$ وقتی:

$$0 < x < 2a$$

$$y=\frac{\cos 3x}{1+\cos 2x}=\frac{4\cos^2 x-3}{2\cos x}$$

$$y' = \frac{-\sin x\left(\text{٤}\cos^{\text{٢}} x + \text{٣}\right)}{\text{٢}\cos^{\text{٢}} x}$$

$$y = \text{۰} \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} \qquad x = \text{۳۰}^\circ ، \text{۱۵۰}^\circ ، \text{۲۱۰}^\circ ، \text{۳۳۰}^\circ$$

$$y = \infty ، \cos x = \text{۰} \qquad x = \text{۹۰}^\circ ، \text{۲۷۰}^\circ$$

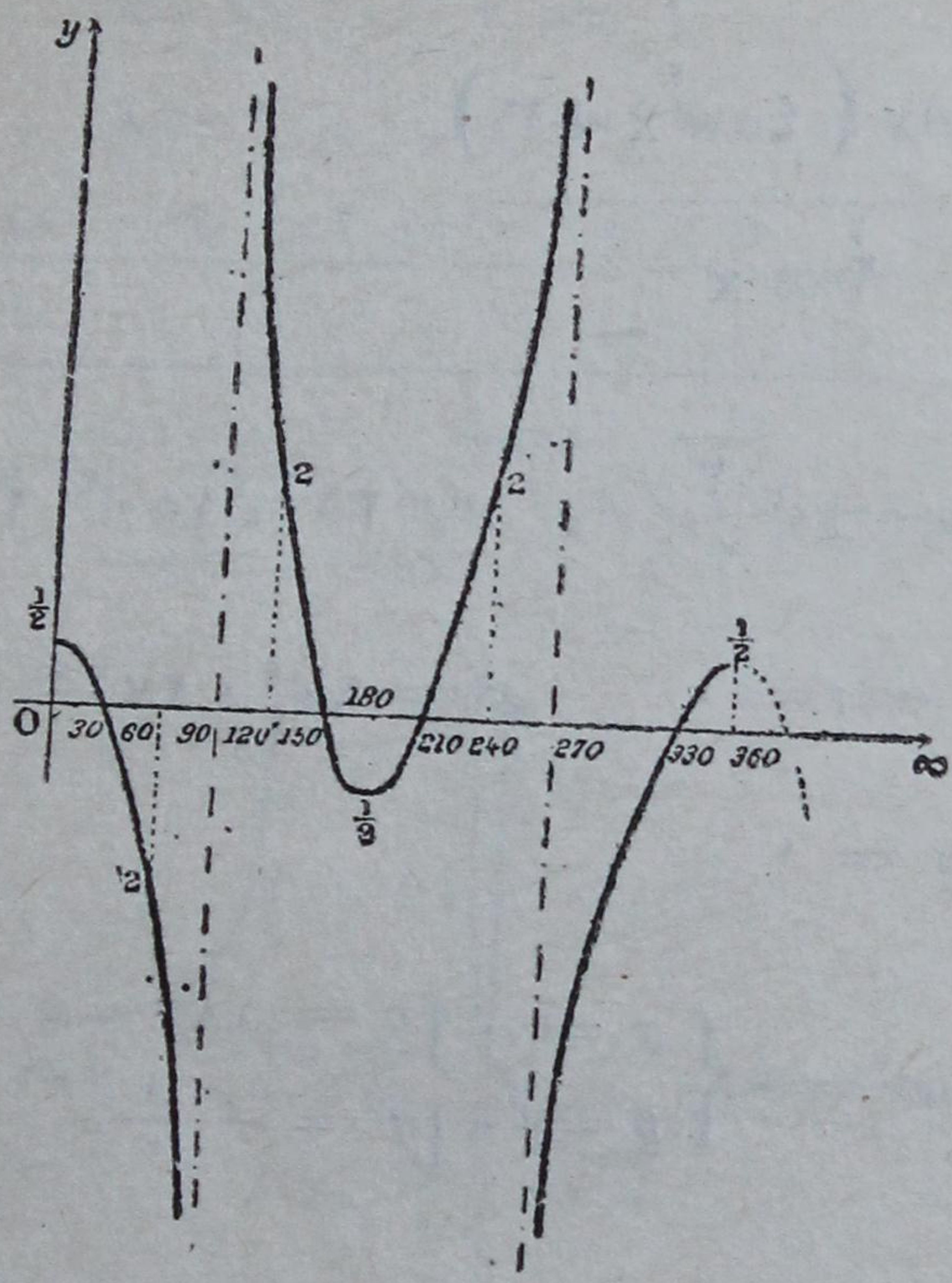
$$x = \text{۰} ، y = \text{۱}$$

$$y' = \text{۰} ، \sin x = \text{۰} \begin{cases} x = \text{۰} \\ y = \text{۰} \end{cases} \begin{cases} x = \text{۱۸}\ldots \\ y = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \end{cases}$$

$$y' > \text{۰} \qquad \text{۱۸۰}^\circ < x < \text{۳٦۰}^\circ$$

| $x$ | ۰ | ۳۰° | ۹۰° | ۱۵۰° | ۱۸۰° | ۲۱۰° | ۲۷۰° | ۳۳۰° | ۳٦۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | ۰ | | − | | ۰ | | + | | ۰ |
| $y$ | ۱ ↘ | ۰ ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘ | ۰ ↘ | $-\frac{۱}{۲}$ ↗ | ۰ ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗ | | |

حال اگر منحنی تغییرات فوق را رسم کنیم شکل ۱۱ بدست میآید




شکل ۱۱

# XXIX حل معادلات بوسیله رسم منحنی

**۲۰٤ — حل معادله** $f(x) = ۰$ - هرگاه جوابهای معادله $f(x) = ۰$ براههائی که در حدود اطلاع ما هستند بدست نیایند میتوان منحنی نمایش تغییرات $y = f(x)$ را با دقت هرچه بیشتر رسم کرد؛ طول نقاط تلاقی این منحنی با محور $x$ ها جوابهای تقریبی معادله‌اند.

**۲۰۵ - حل دستگاه دو معادله دو مجهولی** - $\begin{cases} f(x,y) = ۰ \\ \varphi(x,y) = ۰ \end{cases}$

درهریك از معادلات $y$ را برحسب $x$ بدست میآوریم: $y=f_1(x)$ و $y=\varphi_1(x)$ ؛ آنگاه منحنی دو تابع اخیر را با دقت تمام رسم میکنیم ؛ مختصات نقاط برخورد منحنیها جواب های دستگاه مفروضند.

**۲۰۶ — بحث در وجود و علامت ریشه های معادلهٔ پارامتری $f(x,m)=0$**

از رابطهٔ $f(x,m)=0$ پارامتر $m$ را برحسب $x$ بدست میآوریم ؛ $m=f_1(x)$ ، سپس منحنی تغییرات $m=f_1(x)$ را رسم میکنیم ( $m$ بجای $y$ فرض میشود ) و نیز خط $y=m$ را وقتی $m$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند رسم میکنیم ، بر حسب آنکه خط منحنی را قطع نکند یا بکند یا بر آن مماس شود معادله دارای جواب نیست یا هست یا جواب مضاعف دارد.

## XXX - حل نامعادلات بوسیله منحنی

**۲۰۷** — منحنی نمایش $y=f(x)$ صفحه را بدو ناحیه تقسیم میکند. مختصات هر نقطه واقع بر منحنی در رابطهٔ $y-f(x)=0$ صادقند و مختصات هر نقطه غیرواقع بر منحنی در یکی از دو رابطهٔ $y-f(x)>0$ یا $y-f(x)<0$ صدق می کنند. مختصات جمیع نقاط واقع در یکی از دو ناحیه صفحه در یکی از دو رابطهٔ اخیر و جمیع نقاط واقع در ناحیه دیگر در رابطهٔ دیگر صادق میباشند.

**۲۰۸ — حل نامعادله $f(x,y) > 0$** — نخست $f(x,y)$ را مساوی صفر انگاشته $y=f_1(x)$ را بوسیله آن بدست میآوریم و منحنی آنرا میکشیم ، آنگاه مختصات یك نقطه $M$ واقع درخارج این منحنی (مبداء مختصات درصورتیکه بر روی منحنی نباشد از هر نقطه دیگر بهتر است) را در رابطه $f(x,y)$ میگذاریم اگر نتیجه مثبت باشد جمیع نقاط واقع در ناحیه‌ایکه شامل نقطه $M$ است در نامعادله صادقند، والا نقاط ناحیه دیگر.

**۲۰۹ — حل دستگاه نامعادلات**

$$\begin{cases} f(x,y) > 0 \\ \varphi(x,y) > 0 \\ \theta(x,y) > 0 \end{cases}$$

برای هریك از سه رابطهٔ دستگاه ناحیه‌ای از صفحه را که جواب مسئله است نگاه داشته ناحیه دیگررا هاشور میزنیم مختصات نقاط قسمتهائی ازصفحه که پس ازخاتمه کار بی‌هاشور بمانند جوابهای دستگاهند.

## XXXI - تابع اولیه - سطح محصور

۲۱۰ - اگر $y=f(x)$ مشتق اول تابع $Y=F(x)$ باشد $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ میگویند و آنرا چنین نمایش میدهند

$$Y=\int y\,dx=\int f(x)\,dx$$

مثال :
$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x=\int(x^2-x+1)dx$$

۲۱۱ - هرگاه پس از تعیین تابع اولیه تابع $y=f(x)$ دو مقدار a و b را بجای $x$ قرارداده تفاضل مقادیری راکه بدست میآیند تعیین کنیم میگوئیم مقدار تابع اولیه $y=f(x)$ را بین دو حد $x=a$ و $x=b$ بدست آورده‌ایم .

مثال :
$$\int_2^3 (x^2-5x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right]_2^3$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-5\frac{3^2}{2}\right)-\left(\frac{2^3}{3}-5\frac{2^2}{2}\right)$$

$$=\left(9-\frac{45}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}-10\right)=-\frac{37}{6}$$

۲۱۲ - **قضیه** - هرگاه $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد $F(x)+c$ هم تابع اولیه آنست (c عددیست ثابت)

۲۱۳ - توابع اولیهٔ مهم بدینقرارند :

| تابع | تابع اولیه |
|---|---|
| $y=0$ | $Y=a$ ( مقدار ثابت) |
| $y=a$ | $Y=ax+c$ |
| $y=ax^m$ | $Y=\frac{a}{m+1}x^{m+1}+c$ |
| $y=\frac{a}{\sqrt{x}}$ | $Y=2a\sqrt{x}+c$ |

$y=\sin x$ $\qquad Y=-\cos x+c$

$y=a\sin mx$ $\qquad Y=-\frac{a}{m}\cos mx+c$

$y=\cos x$ $\qquad Y=\sin x+c$

$y=\frac{۱}{\cos^{۲} x}$ $\qquad Y=tgx+c$

$y=۱+tg^{۲} x$ $\qquad Y=tgx+c$

$y=\frac{۱}{\sin^{۲} x}$ $\qquad Y=\cot gx+c$

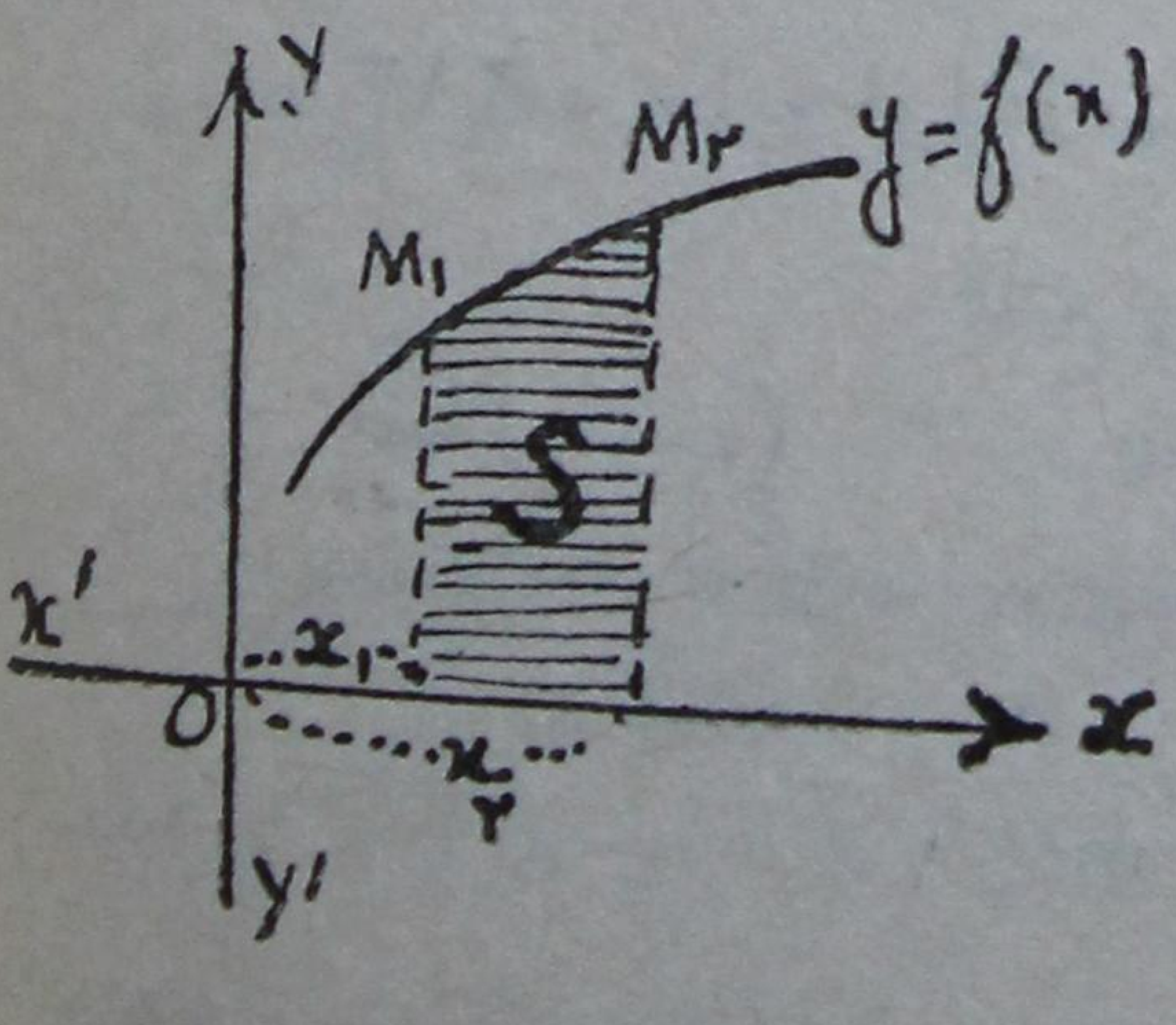
$y=۱+\cot g^{۲} x$ $\qquad Y=-\cot gx+c$

$y=\sin^{۲} x=\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲x)$ $\qquad Y=\frac{۱}{۲}(x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x)+c$

$y=\cos^{۲} x=\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲x)$ $\qquad Y=\frac{۱}{۲}(x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x)+c$

$y=tg^{۲} x=\frac{۱}{\cos^{۲} x}-۱$ $\qquad Y=tgx-x+c$

۲۱٤ — **قضیه** . هرگاه تابع $y=f(x)$ در فاصله $x_۱$ و $x_۲$ اتصالی باشد سطح محصور بین منحنی نمایش $y=f(x)$ ومحور $x$ ها و دو عرض ثابت بطول $x_۱$ و $x_۲$ مساوی است با مقدار تابع اولیه $y=f(x)$ بین دو حد $x_۱$ و $x_۲$ یعنی :



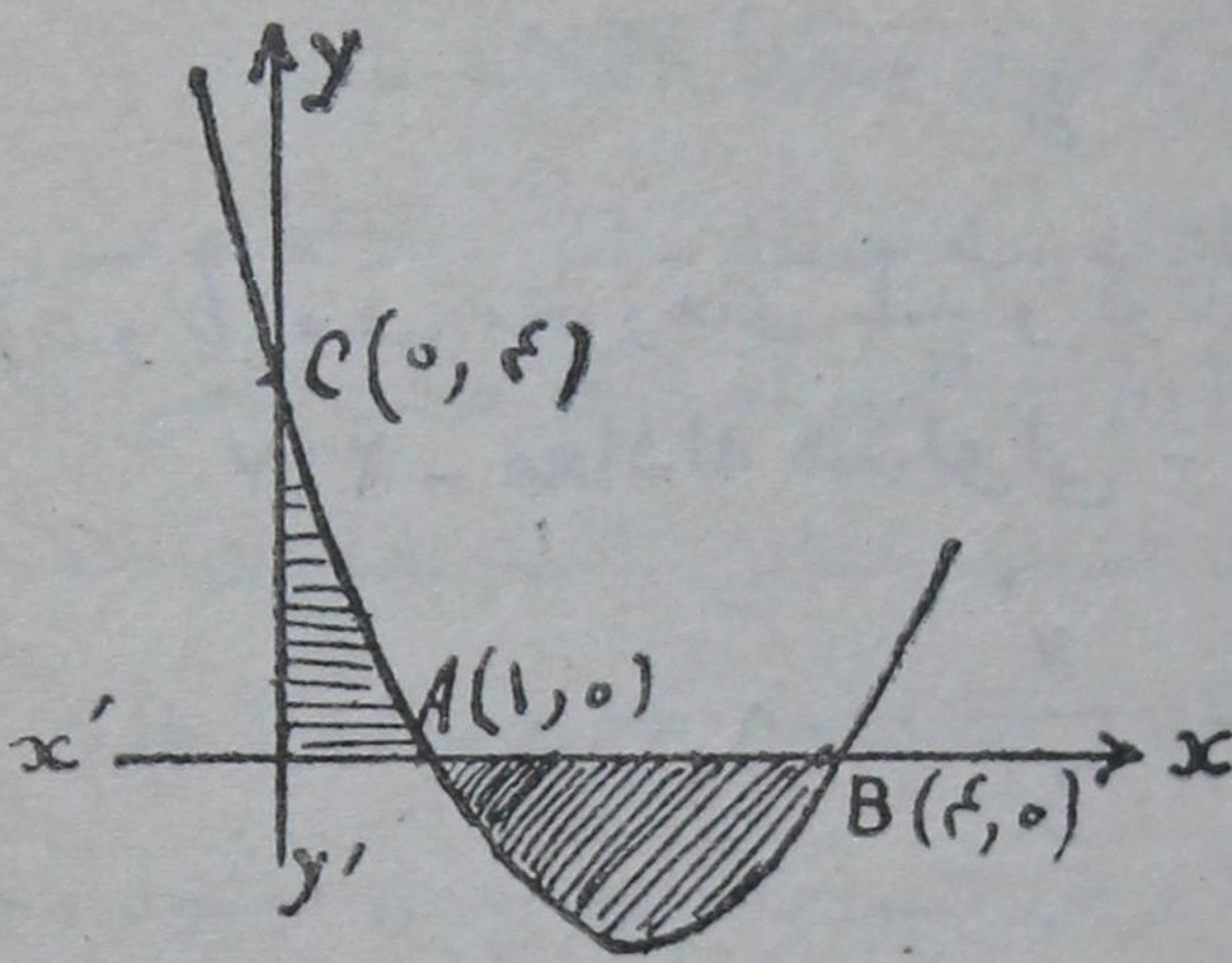

شکل ۱۲

$$S=\int_{x_۱}^{x_۲} f(x)\,dx$$

**مثال ۱** — سطح محصور بین محور $x$ ها و منحنی

$$y = x^{۲} - ۵x + ٤$$

(ش ۱۳)




شکل ۱۳

$$S = \int_{۱}^{٤} (x^{۲} - ۵x + ٤)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{۳}}{۳} - \frac{۵x^{۲}}{۲} + ٤x\right]_{۱}^{٤}$$

$$= - ٤٫۵$$

مثال ۲ — سطح بین منحنی مثال ۱ ومحور $y$ ها ومحور $x$ ها (ش ۱۳)

$$S = \int_{۰}^{۱} (x^{۲} - ۵\,x + ٤)\,dx = \frac{۱۱}{٦}$$

## متمم جبر

# XXXII معادلات منحنی های مخصوص (۱)

**۲۱۵ — معادله دایره** — اگر مرکز دایره $M(\alpha \text{،} \beta)$ و شعاع آن $R$ باشد:

$$(x - \alpha)^{۲} + (y - \beta)^{۲} - R^{۲} = ۰$$

**۲۱٦ — معادله بیضی** — وقتی مرکز ومحورهای آن بترتیب برمرکز و محورهای مختصات منطبق باشند:

---

(۱) رجوع شود بقسمت مخروطات همین کتاب

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} - ۱ = ۰$$

($a$ و $b$ نصف محورهای بلند و کوتاه بیضی هستند)

۲۱۷ - **معادله هذلولی** - با شرایط شماره ۲۱۶ :

$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} - ۱ = ۰$$

۲۱۸ — **معادله سهمی** - وقتی محور آن برمحور $x$ ها و رأس آن برمرکز منطبق باشند و فاصله کانون از خط هادی را $p$ مینمائیم :

$$y^۲ = ۲px$$

## XXXIII حل معادلات دوجمله وسه جمله

۲۱۹ - **معادلهٔ دوجمله** - معادله دوجملهٔ درجه n ام بصورت $a x^n + bx^p = ۰$ میباشد $(p<n)$ برای حل آن $x^p$ را عامل مشترك قرارمیدهیم :

$$x^p(ax^{n-p} + b) = ۰$$

علاوه بر p جواب مساوی ، جواب دیگر معادله عبارتست از :

$$x = \sqrt[n-p]{\frac{-b}{a}}$$

اگر $p$ و $n$ هردو زوج یا هردو فرد باشند شرط قابل قبول بودن جواب آنست که $a$ و $b$ مختلف العلامه باشند.

۲۲۰ - **معادله سه جمله** - این معادله که صورت کلی آن $ax^n + bx^p + cx^q = 0$ است درحالت خاصی که n و p و q جمله های یك تصاعد حسابی باشند بصورت یك معادلهٔ درجه دوم در میآید و قابل حل است. زیرا چون تفاضل $n - p = p - q$ میشود وچون در $n - q = 2r$ را $r$ فرض کنیم سه جمله $x^q$ را عامل مشترك قرار دهیم:

$$x^q(ax^{n-q} + bx^{p-q} + c) = 0$$

یا

$$x^q(ax^{2r} + bx^r + c) = 0$$

$x^r$ رامساوی $y$ فرض مینمائیم، پس

$$x^q(ay^2 + by + c) = 0$$

## XXXIV - قاعده بزو برای حل معادلات چند مجهولی درجه اول

۲۲۱ - این قاعده عبارتست از تعمیم قاعده حذف که در حل معادلات دو مجهولی درجهٔ اول ذکر گردیده است (شمارهٔ ۶۵)

فرض کنیم مقصود حل دستگاه درجه اول سه مجهولی

$$(I)\quad \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

اگر دومعادلهٔ آخر این دستگاه را بترتیب در مقادیر اختیاری $\alpha$ و $\beta$ ضرب وسه معادله را باهم جمع و بر حسب $x$ و $y$ و $z$ مرتب کنیم چنین خواهیم داشت .

$$(a+a'\alpha+a''\beta)x+(b+b'\alpha+b''\beta)y$$
$$+(c+c'\alpha+c''\beta)z+(d+d'\alpha+d''\beta)=0$$

بدیهیست که معادلهٔ اخیر جوابهای دستگاه (I) راقبول میکند. حال مامیتوانیم مقادیراختیاری $\alpha$ و $\beta$ راطوری انتخاب کنیم که ضرایب $y$ و $z$ درمعادلهٔ اخیر صفر شوند .

برای اینکار باید $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های دستگاه

$$\begin{cases} b+b'\alpha+b''\beta=0 \\ c+c'\alpha+c''\beta=0 \end{cases}$$

باشند یعنی

$$\beta=\frac{bc'-cb'}{b'c'-c'b''}\qquad \alpha=\frac{b''c-c\,b}{b'c''-c'b}$$

در اینصورت

$$x=-\frac{d+d'\alpha+d\,\beta}{a+a'\alpha+a''\beta}$$

برای بدست آوردن $y$ و $z$ بهمین نحو ضرایب دومجهول دیگر را مساوی صفر قرار میدهیم .

## XXXV معادلات مجهول‌القوی و لگاریتمی

۲۲۲ - **تعریف** - معادله‌مجهول‌القوی آنست که در آن مجهول بصورت نمایندهٔ عدد معلومی درآمده باشد . معادله لگاریتمی آنست که در آن لگاریتم عددهای مجهول و خود آنها وجود داشته باشند .

با چند مثال نوعهای مختلف اینگونه معادلات و راه حلهای آنها را نشان میدهیم . (در مثالها حروف معلوم همه مثبت فرض میشوند )

**مثال ۱** - $a^x = b$

$$x \log a = \log b \qquad x = \frac{\log a}{\log b}$$

**مثال ۲**

$$a^{m^{n^{x}}} = b$$

فرض میکنیم $n^x = y$ و $m^y = z$ باشند. پس $a^z = b$

یعنی $$x = \log\left[\frac{\log\left(\frac{\log b}{\log a}\right)}{\log m}\right] \times \frac{۱}{\log n}$$

**مثال ۳** $a\alpha^{۲x} + b\alpha^x + c = ۰$

فرض میکنیم $\alpha^x = y$ باشد، پس $x = \frac{\log y}{\log \alpha}$

و $y$ ریشه معادله $ay^۲ + by + c = ۰$ است .

مثال ۴

$$\begin{cases} \log x + \log y = m \\ ax + ly = c \end{cases}$$

این دستگاه تبدیل میشود بدستگاه

$$\begin{cases} xy = 10^m \\ ax + by = c \end{cases}$$

مثال ۵

$$(I) \begin{cases} x^y = y^x \\ x^a = y^b \end{cases}$$

دستگاه ( I ) تبدیل میشود بدستگاه :

$$(II) \begin{cases} y \log x = x \log y \\ a \log x = b \log y \end{cases}$$

که پس از تقسیم عضو بعضو بصورت $y = \frac{a}{b}x$

درمیآید و اگر فرض کنیم $b<a$ باشد مقادیر $x$ عبارتند از جوابهای معادلهٔ

$$x^b\left(x^{(a-b)} - \left(\frac{a}{b}\right)^b\right) = 0$$

مثال ٦ معادلهٔ $A^{(ax^2+bx+c)} = B$

منجر میشود بمعادلهٔ $ax^2 + bx + c - \frac{\log B}{\log A} = 0$

## XXXVI تجزیه رادیکالهای مرکب

۲۲۳ — مقصود از این عمل تجزیه عبارت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

است بصورت مجموع یا تفاضل دو رادیکال .

قضیه - اگر $A + \sqrt{B} = A' + \sqrt{B'}$ باشد (B و B' مجذور کامل نیستند ) $A = A'$ و $B' = B$ میباشد .

حال برای تجزیه $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ آنرا مساوی $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ فرض نموده $x$ و $y$ را حساب میکنیم :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm ۲\sqrt{xy}$$

پس :

$$\begin{cases} x + y = A \\ xy = \dfrac{B}{٤} \end{cases}$$

x و y ریشه های معادلهٔ $x^۲ - Ax + \frac{B}{٤} = ۰$ میباشند :

$$x = \frac{A + \sqrt{A^۲ - B}}{۲} \qquad y = \frac{A - \sqrt{A^۲ - B}}{۲}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^۲ - B}}{۲}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^۲ - B}}{۲}}$$

بدیهیست که برای مرکب نبودن طرف دوم باید $A^۲ - B$ مجذور کامل باشد .

## XXXVII حل معادله درجه سوم

۲۲٤ - نخست میگوئیم هر معادله کامل درجه سوم را

میتوان بصورت معادله ناقص $x^3+px+q=0$ در آورد .
زیرا اگر در معادله $a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1=0$ نخست تمام جمل را بر $a_1$ تقسیم کنیم بصورت $X^3+aX^2+bX+c=0$ درخواهد آمد . و چون $X$ را مساوی $x\times u$ فرض نمائیم و بجای $u$ مقدار $\frac{-a}{3}$ را قرار دهیم ضریب درجهٔ دوم از بین میرود و معادله بصورت $x^3+px+q=0$ درمیآید . که

درآن $\left(p=\frac{3b-a^2}{3} \text{ و } q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}\right)$

۲۲۵ - **تحقیق در عده جوابها** - تابع درجه سوم $y=x^3+px+q$ ممکنست دارای یك ماکزیمم ویك می نیمم باشد که طول آنها ریشه‌های مشتق $3x^2+p=0$ یا $x=\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$ میباشند. شرط وجود ماکزیمم و می نیمم اینست که $p<0$ باشد . اگر این شرط تحقق یابد و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع مختلف العلامه باشند منحنی محور $x$ ها را در سه نقطه قطع میکند یعنی معادله $x^3+px+q=0$ سه جواب دارد اما اگر ماکزیمم و می نیمم متحدالعلامه باشند معادله بیش از یك جواب نخواهد داشت .

مقدار ماکزیمم و می نیمم چنین اند .

$$M_1=q+\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} \quad \text{و} \quad M_2=q-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

و ... حاصلضربشان $q^۲ + \frac{۴p^۳}{۲۷}$ میباشد.

پس هرگاه $۴p^۳ + ۲۷q^۲ < ۰$ معادله سه جواب دارد

و « $۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۰$ « دو « (یکی مضاعف)

و « $۴p^۳ + ۲۷q^۲ > ۰$ « یك «

**۲۲۶ - حل معادله $x^۳ + px + q = ۰$ ازراه مثلثاتی**

یادآوری میکنیم که $۴cos^۳\varphi - ۳cos\varphi = cos۳\varphi$

یا $$cos^۳\varphi - \frac{۳}{۴}cos\varphi = \frac{۱}{۴}cos۳\varphi \quad (۱)$$

اکنون در رابطهٔ $x^۳ + px = -q$ بجای $x$ مقدار $ycos\varphi$ را قرار میدهیم تا رابطهٔ

$$(۲) \quad cos^۳\varphi + \frac{p}{y^۲}cos\varphi = -\frac{q}{y^۳}$$

بدست آید. اگر $\frac{p}{y^۲} = -\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}cos۳\varphi = -\frac{q}{y^۳}$

فرض شوند یعنی $y = ۲\sqrt{\frac{-p}{۳}}$ و $cos۳\varphi = \frac{\sqrt{۲۷}\;q}{۲\sqrt{p^۳}}$

باشند معادلهٔ (۲) تبدیل بمعادله (۱) میشود.

ازروی مقدار $cos۳\varphi$ نخست سه زاویه $۳\varphi$ و $۳\varphi - ۲\pi$

و $۳\varphi + ۲\pi$ را یافته $\frac{۱}{۳}$ آنهارا در مقدار $۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}$ ضرب می کنیم تا سه جواب معادله $x^{۳} + px + q = ۰$ بدست آیند.

بدیهیست که شرط وجود جواب منفی بودن $۴p^{۳} + ۲۷q^{۲}$ میباشد.

**مثال عددی** - $x^{۳} - ۴x - ۱٫۵۳۹۵۸ = ۰$

$$y = ۲\sqrt{-\frac{p}{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} = ۲٫۳۰۹۴$$

و $$\cos ۳\varphi = \frac{\sqrt{۲۷}\, q}{۲\sqrt{p^{۳}}} = \frac{\sqrt{۲۷} \times ۱٫۵۳۹۵۸}{۱۶} = ۰/۵۰۰$$

پس :

$$۳\varphi = ۶۰^{\circ} \qquad \varphi_{۱} = ۲۰^{\circ}$$

$$۲\pi + ۳\varphi = ۴۲۰^{\circ} \qquad \varphi_{۲} = ۱۴۰^{\circ}$$

$$۲\pi - ۳\varphi = ۳۰۰^{\circ} \qquad \varphi_{۳} = ۱۰۰^{\circ}$$

یعنی $\cos \varphi_{۱} = ۰٫۹۳۹۶$

$$\cos \varphi_{۳} = -۰٫۱۷۳۶ \qquad \cos \varphi_{۲} = -۰٫۷۶۶۰$$

وبالاخره

$$x_{۱} = ۲٫۱۶۹۸$$

$$x_{۲} = -۱٫۷۶۸۹$$

$$x_{۳} = -۰٫۴۰۰۹$$

**پایان**

# مثلثات

## I کلیات

۱ — **موضوع** - هر مثلث دارای شش جزء (سه ضلع وسه زاویه) است که اگر سه تای آنها را بوضع مناسبی (رجوع شود بهندسه) داشته باشیم میتوانیم سه جزء دیگر را بدست آوریم.

در مثلثات قواعدی گفته میشوند که بکمك آنها از روی اجزاء معلوم اجزاء مثلث را میتوان حساب کرد.

۲ — **اندازه قوس** - برای اندازه گرفتن قوس دایره (یا زاویه مرکزی مقابل آن) سه واحد بکارمیرود:

۱) **درجه** $= \frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره $= \frac{۱}{۹۰}$ زاویه قائمه.

**اجزاء آن:** دقیقه $= \frac{۱}{۶۰}$ درجه

ثانیه $= \frac{۱}{۶۰}$ دقیقه $= \frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه

۲ ) گراد = $\frac{۱}{٤۰۰}$ محیط دایره = $\frac{۱}{۱۰۰}$ زاویه قائمه .

اجزاء آن : دسی گراد = $\frac{۱}{۱۰}$ ، سانتی گراد = $\frac{۱}{۱۰۰}$ ، میلی گراد = $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد

۳) — رادیان - وآن قوسی است ازدایره که طولش مساوی شعاع دایره باشد . پس محیط دایره برابر است با ۲ رادیان .

۳ - رابطه بین درجه ، گراد ورادیان

اگراندازه قوس AB مساوی D درجه و G گراد و R رادیان باشد :

$$\frac{D}{۳٦۰} = \frac{G}{٤۰۰} = \frac{R}{۲\pi}$$

٤ — دائره مثلثاتی - دائره ایست که شعاع آن مساوی واحد باشد .

٥ — دائره جهت‌دار - دائرهٔ راکه جهت مثبت یا منفی آن تعیین شده باشد دائره جهت‌دار میگویند .

اگر متحرکی از نقطه A واقع برروی محیط دائره حرکت کند تا بنقطه B برسد گوئیم قوس AB را طی نموده است . A را مبداء و B را منتهای قوس گویند . ممکنست

متحرك پس از حرکت از نقطه A یك یا چندور محیط دائره را طی کند و در B متوقف شود در این صورت هم متحرك قوس AB را طی کرده است . اگر طول کوچکترین قوس AB مساوی $\alpha$ رادیان باشد :

$$\text{ق } AB = 2K\pi + \alpha$$

( K عددی است صحیح مثبت یا صفر یا منفی )

۶- **قضیه شال** - اگر نقاط A و B و C و ۰۰۰ و F بر روی محیط دائره واقع باشند :

$$\text{ق } AB + \text{ق } BC + \text{ق } CD + \text{ق } DF + \text{ق } FA = 2K\pi$$

اگر نقطه M واقع بر محیط دائره مبداء قوسها ، a و b طول های قوسهای MA و MB و نقطه C وسط AB باشد .

$$\text{ق } MC = 2K\pi + \frac{a+b}{2}$$

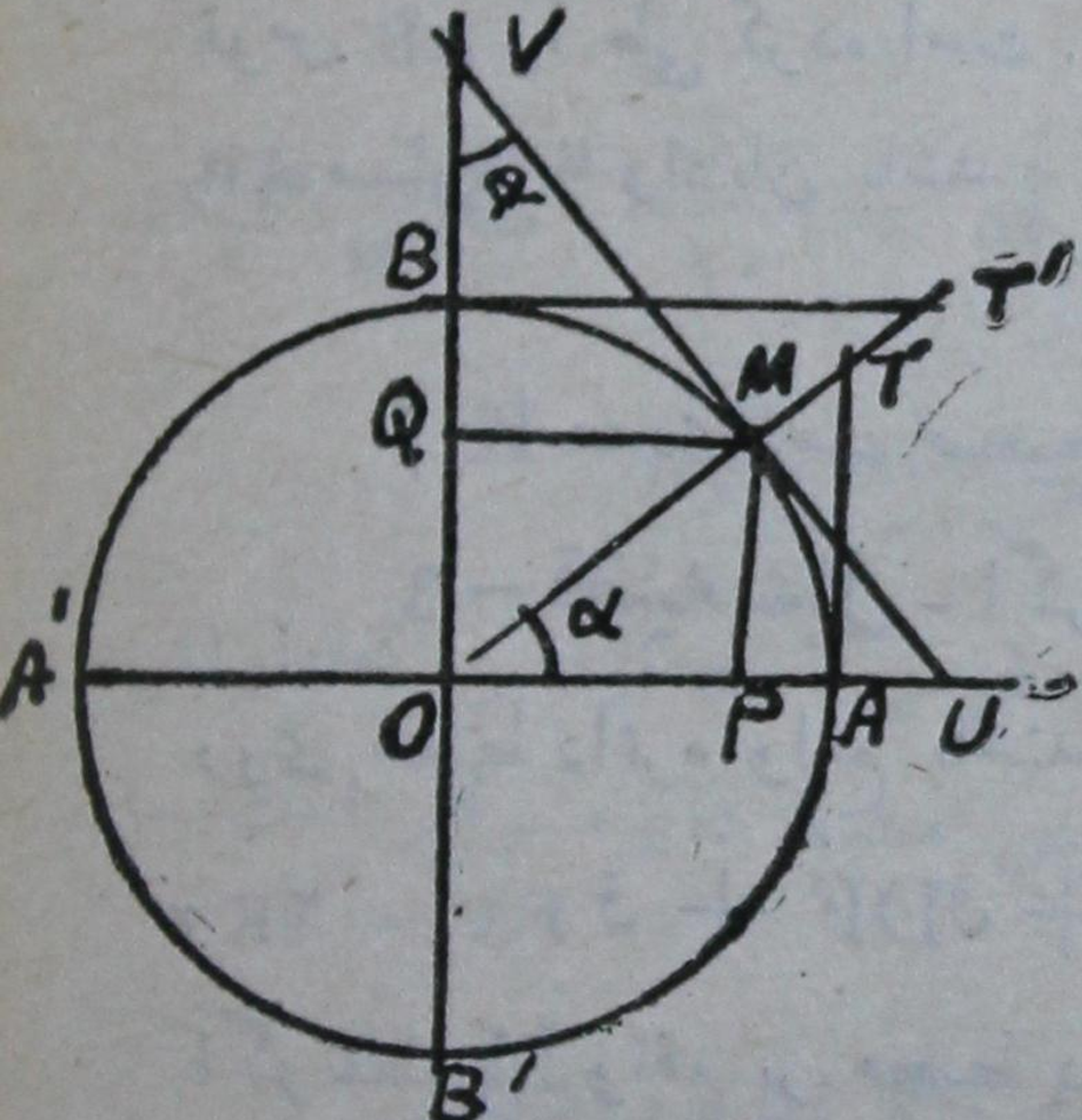
۷- **تعریف** - دوقوس را که دارای مبداء مشترك باشند قرینه گویند وقتیکه منتهای آن دو نسبت بمحوری که از مبداء مشترك میگذرد قرینه باشند .

مجموع دوقوس قرینه مساویست با 2K .

۸ - **تعریف**- دو قوس را **متمم** گویند وقتیکه مجموع آنها مساوی ربع دائره یا $\frac{\pi}{2}$ باشد .

۹ - تعریف - دو قوس را **مکمل** گویند وقتی که

مجموعشان مساوی نصف محیط دائره یا π باشد .




## II خطوط مثلثاتی

۱۰ - **تعریف** — اگر در دائره مثلثاتی قوس AM=a داده شده باشد و AA′, قطر مار بر مبداء A و BB′ قطر عمود بر آن را رسم کنیم و عمود های Mp و MQرا بر آن دو قطر فرود آوریم و امتداد شعاع OM مماس در نقطه A را در T و مماس در نقطه B را در T′ قطع نماید و مماسی که از M بر دایره رسم شود قطر AA′ را در U و BB′ را در V تلاقی کند :

۱ ) MP را جیب یا سنیوس a ( Sinus ) علامت اختصاری *sin a*

۲) OP را جیب تمام یا کسنیوس a (Cosinus) علامت اختصاری *cosa*

۳) AT را ظل یا تانژانت a ( Tangente ) علامت اختصاری *tga*

٤) BT′ را ظل تمام یا کتانژانت a ( Cotangente) علامت اختصاری Cotg*a*

۵) OU را قاطع یا سکانت $a$ ( Secante ) علامت اختصاری $\sec a$

۶) OV را قاطع تمام یا کوسکانت $a$ (cosecante ) علامت اختصاری $\operatorname{cosec} a$

مینامند . وهرشش خط را خطوط مثلثاتی قوس $a$ میگویند .

۱۱ - **قضیه** - وقتی قوس $a$ از ۰ تا ۳۶۰ درجه تغییر نماید :

جیب وجیب تمام آن بین ۱ — و ۱+ ، وظل وظل تمام وقاطع وقاطع تمام آن بین ∞— و ∞+ تغییر مینمایند

## ۱۲ - روابط بین خطوط مثلثاتی قوس $a$ -

(۱) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

(۲) $tga = \frac{\sin a}{\cos a}$

(۳) $\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$

(٤) $\sec a = \frac{1}{\cos a}$

(۵) $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$

روابطی که ازروابط فوق نتیجه میشوند .

$$\sin a = \frac{tg\, a}{\pm\sqrt{1 + tg^2 a}} \qquad \cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2 a}}$$

$$1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

## ۱۳ – روابط بین خطوط مثلثاتی قوسهائیکه تفاضل یا مجموعشان مضربی از $\pi$ باشد. ( $k$ عددی است بزرگتر یا کوچکتر ازصفر یا مساوی آن)

۱ - اگر $a - b = k\pi$ ( تفاضل دو قوس مضرب زوج $\pi$ ) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin(۲k\pi + b) = \sin b \\ \cos a = \cos(۲k\pi + b) = \cos b \\ tg\, a = tg(۲k\pi + b) = tg\, b \end{cases}$$

۲ - اگر $a + b = ۲k\pi$ ( مجموع دوقوس مضرب زوج $\pi$ ) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin(۲k\pi - b) = -\sin b \\ \cos a = \cos(۲k\pi - b) = \cos b \\ tg\, a = tg(۲k\pi - b) = -tg\, b \end{cases}$$

۳ - اگر $a - b = (۲k + ۱)\pi$ (تفاضل مضرب فرد $\pi$ ) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin[(۲k + ۱)\pi + b] = -\sin b \\ \cos a = \cos[(۲k + ۱)\pi + b] = -\cos b \\ tg\, a = tg[(۲k + ۱)\pi + b] = tg\, b \end{cases}$$

٤ - اگر $a + b = (۲k + ۱)\pi$ ( مجموع مضرب فرد $\pi$ ) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin[(۲k + ۱)\pi - b] = \sin b \\ \cos a = \cos[(۲k + ۱)\pi - b] = -\cos b \\ tg\, a = tg[(۲k + ۱)\pi - b] = -tg\, b \end{cases}$$

۱٤- در قوسهای متمم ، یعنی اگر $a+b=\frac{\pi}{۲}$ باشد :

$$sin a = sin\left(\frac{\pi}{۲} - b\right) = cos\ b$$

$$cos\ a = cos\left(\frac{\pi}{۲} - b\right) = sin\ b$$

$$tg a = tg\left(\frac{\pi}{۲} - b\right) = cotg\ b$$

اگر تفاضل دو قوس یك قائمه باشد $a-b=\frac{\pi}{۲}$

$$sin a = sin\left(\frac{\pi}{۲} + b\right) = cos b$$

$$cos\ a = cos\left(\frac{\pi}{۲} + b\right) = -\ sin\ b$$

$$tg a = tg\left(\frac{\pi}{۲} + b\right) = -\ cotg\ b$$

## ۱۵ - روابط بین قوسهائی که یك خط مثلثاتی داشته باشند.

۱- اگر $sma = sin b$ :
$$\begin{cases} a = ۲k\pi + b \\ a + (۲k+۱)\pi - b \end{cases}$$

۲- اگر $cos a = cos b$ :
$$\begin{cases} a = ۲k\pi + b \\ a = ۲k\pi - b \end{cases}$$

۳ - اگر $tg a = tg b$ : $a = k\pi + b$

## ۱۶ - جدول مثلثاتی برخی قوسهای مهم :

| قوس | $sin$ | $cos$ | $tg$ | $cotg$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | $\infty$ |
| $\frac{\pi}{۶}=۳۰^\circ$ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | $\sqrt{۳}$ |
| $\frac{\pi}{٤}=٤۵^\circ$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | ۱ | ۱ |
| $\frac{\pi}{۳}=٦۰^\circ$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | $\sqrt{۳}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ |
| $\frac{\pi}{۲}=۹۰^\circ$ | ۱ | ۰ | $\infty$ | ۰ |

## ۱۷ - دوره تناوب خطوط مثلثاتی

خطوط مثلثاتی توابع متناوب (جبر ، شماره ۱۵۲) قوس هستند ، دورهٔ تناوب جیب وجیب تمام و قطر ظل و قطر ظل تمام $۲\pi$ ودوره تناوب ظل وظل تمام $\pi$ میباشد .

# III- جمع و تفریق و ضرب و تقسیم قوسها

**۱۸ - تصویر بر محور** - هرگاه $a$ طول قطعه خط $AB$ و $\alpha$ زاویهٔ آن با جهت مثبت محور و $a'$ تصویر آن بر محور باشد :

$$a' = a\cos\alpha$$

## ۱۹ ــ خطوط مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو قوس

۱ - مجموع: $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{۱ - tga\,tgb}$$

ب - تفاضل $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{۱ + tga\,tgb}$$

## ۲۰ ــ مجموع سه قوس:

$$\sin(a+b+c) = \sin[(a+b)+c] =$$

$$\sin a\cos b\cos c + \sin b\cos a\cos c + \sin c\cos a\cos b$$

$$- \sin a\sin b\sin c$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a\cos b\cos c - \cos a\sin b\sin c$$

$$- \cos b\sin a\sin c - \cos c\sin a\sin b$$

$$tg(a+b+c) = \frac{tga + tgb + tgc - tga\,tgb\,tgc}{۱ - tga\,tgb - tgb\,tgc - tga\,tgc}$$

## ۲۱ - خطوط مثلثاتی قوسهائی که مضرب یك قوس هستند:

۱ ـ قوسهای دو برابر:

$$\begin{cases} \sin ۲a = ۲\sin a\cos a \\ \cos ۲a = \cos^۲ a - \sin^۲ a = ۲\cos^۲ a - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲ a \\ tg ۲a = \dfrac{۲tga}{۱ - tg^۲ a} \end{cases}$$

۲ - قوسهای سه برابر:

$$\begin{cases} \sin ۳a = ۳\sin a - ٤\sin^۳ a \\ \cos ۳a = ٤\cos^۳ a - ۳\cos a \\ tg ۳a = \dfrac{۳tga - tg^۳ a}{۱ - ۳tg^۲ a} \end{cases}$$

۳ - قوسهای پنج برابر:

$$\begin{cases} \sin ٥a = ٥\sin a - ۲٠\sin^۳ a + ۱٦\sin^٥ a \\ \cos ٥a = ۱٦\cos^٥ a - ۲٠\cos^۳ a + ٥\cos a \end{cases}$$

## ۲۲ - خطوط مثلثاتی یك قوس بر حسب ظل نصف آن

$$\sin a = \frac{۲\, tg\frac{a}{۲}}{۱ + tg^۲\frac{a}{۲}}, \quad \cos a = \frac{۱ - tg^۲\frac{a}{۲}}{۱ + tg^۲\frac{a}{۲}} \quad tga = \frac{۲\, tg\frac{a}{۲}}{۱ - tg^۲\frac{a}{۲}}$$

## ۲۳ - خطوط مثلثاتی یك قوس بر حسب جیب دو برابر آن

$$\sin a = \frac{۱}{۲}\left(\pm\sqrt{۱ + \sin ۲a} \pm \sqrt{۱ - \sin ۲a}\right)$$

$$\cos a = \frac{۱}{۲}\left(\pm\sqrt{۱ + \sin ۲a} \pm \sqrt{۱ - \sin ۲a}\right)$$

۲۴- خطوط مثلثاتی یك قوس بر حسب جیب تمام دو برابر آن

$$sin a = \pm\sqrt{\frac{۱ - cos\ ۲a}{۲}}$$

$$cos a = \pm\sqrt{\frac{۱ + cos ۲a}{۲}}$$

**۲۵ - محاسبه $tg a$ بر حسب $tg ۲a$**

$$tg\ a = \frac{- ۱ \pm \sqrt{۱ + tg^{۲}\ ۲a}}{tg ۲a}$$

## ۱۷- لگاریتمی کردن

**۲۶** - در جبر دیده‌ایم که لگاریتم حاصلضرب (یا خارج قسمت) چند مقدار برابر است با مجموع (یا تفاضل) لگاریتم های آنها .

چون در جداول لگاریتم بجای خطوط مثلثاتی قوسهای مختلف لگاریتمهای آن خطوط را داده‌اند اغلب محتاج باستفاده از لگاریتم خطوط بجای خود آنها هستیم . بنا براین باید سعی کنیم تا هرجا که ممکنست بجای مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی حاصلضرب یا خارج قسمت آنها را بدست آوریم .

این عمل ، یعنی تبدیل مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی به حاصلضرب یاخارج قسمت ، را لگاریتمی کردن یاقابل محاسبه کردن آنها میگویند .

**۱۷ - تبدیل مجموع یا تفاضل دو خط مثلثاتی بحاصلضرب :**

$$sin p + sin q = ۲\ sin \frac{p+q}{۲} cos \frac{p-q}{۲} \qquad (۱$$

۲) $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

۳) $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

٤) $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

٥) $tg\,p+tg\,q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

٦) $tg\,p-tg\,q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

۷) $\cos p-\sin q=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p-q}{2}\right)$

۸) $\sin p+\cos q=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

۹) $1+\sin a=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$

۱۰) $1-\sin a=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$

۱۱) $1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2}$

۱۲) $1-\cos a=2\sin^2\frac{a}{2}$

## ۲۸ - تبدیل حاصلضرب دو خط مثلثاتی بمجموع یا تفاضل :

$$\sin a \sin b = \frac{۱}{۲}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{۱}{۲}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

## ۲۹ – تبدیل برخی عبارات مثلثاتی بحاصلضرب

۱) برای تبدیل عبارت $a\cos x + b\sin x$ فرض میکنیم $\frac{b}{a} = tg\varphi$ باشد

پس $a\cos x + b\sin x = a\left(\cos x + \frac{b}{a}\sin x\right)$

$$= a(\cos x + tg\varphi \sin x) = \frac{a}{\cos\varphi}\cos(\varphi - x)$$

۲) برای تبدیل عبارت $a+b$ فرض میکنیم $\frac{a}{b} = tg^{۲}\varphi$ باشد : پس

$$+b = a\left(۱ + \frac{b}{a}\right) = a(۱ + tg^{۲}\varphi) = \frac{a}{\cos^{۲}\varphi}$$

۳) برای تبدیل $a-b$ فرض میکنیم $\frac{b}{a} = \sin^{۲}\varphi$ باشد :

پس $a - b = a(۱ - \sin^{۲}\varphi) = a\cos^{۲}\varphi$

۴) برای تبدیل $\frac{a-b}{a-b}$ فرض میکنیم $tg\,\varphi = \frac{b}{a}$ باشد:

پس $\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-tg\varphi}{1+tg\varphi} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$

۵) برای تبدیل $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ فرض میکنیم $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ باشد:

پس $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = tg\frac{\varphi}{2}$

**۶) حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$**

**از راه مثلثات:**

اگر فرض کنیم $x = tg\varphi$ ، معادله باینصورت در میآید

$$(c-a)\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi + c + a = 0$$

برای حل این معادله و تعیین $\varphi$ مراجعه شود بحل معادلات مثلثاتی (شماره ۳۴)

# ۷ روابط بین اجزاء مثلث

## ۳۰ – درمثلث قائم

۱) $A = \frac{\pi}{2}$ $\qquad B + C = \frac{\pi}{2}$

۲) $b = a\sin B = a\cos C = ctg B = a\cot g C$

۳) $c = a\sin C = a\cos B = b\,tg C = b\cot g B$

۴) $a^2 = b^2 + c^2$

۵) $tg\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ $\qquad$ ۶) $tg\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$

## ۳۱ ـ درمثلث غیر مشخص

($R$ شعاع دایرهٔ محیطی)

۱) $A+B+C=۲\pi$

۲) $\frac{a}{sin A}=\frac{b}{sin B}=\frac{c}{sin C}=۲R$ (دستگاه I)

۳) دستگاه II
$$\begin{cases} a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A \\ b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}-۲ac\cos B \\ c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos C \end{cases}$$

۴) دستگاه III
$$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B \\ b=a\cos C+c\cos A \\ c=b\cos A+a\cos B \end{cases}$$

## ۳۲ ـ روابط بین اضلاع و زوایای مثلث باشعه دوایر محیطی و محاطی

($R$ شعاع دایره محیطی ، $r$ شعاع دایره محاطی، $r_a$ ، $r_b$ و $r_c$ اشعه دوایر محاطی خارج، $a$ و $b$ و $c$ اضلاع، $p$ محیط)

$$R=\frac{abc}{۴\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

$$r=(p-a)tg\frac{A}{۲}=(p-b)\,tg\frac{B}{۲}=(p-c)tg\frac{C}{۲}$$

### ۳۳ – مساحت مثلث

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

$$S=pr=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S=\sqrt{r\,r_a\,r_b\,r_c} \qquad S=\frac{obc}{۴R}$$

$$S=\frac{۱}{۲}a^{۲}\frac{\sin B\sin C}{\sin A}=\frac{۱}{۲}b^{۲}\frac{\sin A\sin C}{\sin B}$$

$$=\frac{۱}{۲}C^{۲}\frac{\sin A\sin B}{\sin C}$$

### ۳۴) ارتفاعات مثلث

$$h_a=\frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=b\sin c=c\sin B=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$$

$$h_b = \frac{۲}{b}\sqrt{\cdots} = a\sin C = c\sin A = \frac{b\sin A\sin C}{\sin B}$$

$$h_c = \frac{۲}{c}\sqrt{\cdots} = a\sin B = b\sin A = \frac{c\sin A\sin B}{\sin C}$$

**۳۵ — منصف زاویه‌ها**ـ اگر $l_a$ و $l_b$ و $l_c$ منصف زاویه‌های داخلی A و B و C و $\lambda_a$ و $\lambda_b$ و $\lambda_c$ منصف زاویه های خارجی آنها باشند :

$$l_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \frac{b\sin C}{\cos\frac{B-C}{۲}}$$

$$= \frac{c\sin B}{\cos\frac{B-C}{۲}} = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A\cos\frac{B-C}{۲}}$$

$$l_b = \cdots \qquad l_c = \cdots$$

$$\lambda_a = \frac{۲}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} =$$

$$\frac{b\sin C}{\sin\frac{B-c}{۲}} = \frac{c\sin B}{\sin\frac{B-C}{۲}} = \frac{a m B\sin C}{\sin A\sin\frac{B-C}{۲}}$$

$$\lambda_b = \cdots \qquad \lambda_c = \cdots$$

**۳۶ - میانه‌ها**

$$m_a = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲ + c^۲) - a^۲}$$

$$m_b = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲ + c^۲) - b^۲}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-c^2}$$

## ۳۷ - روابط بین اجزاء مختلف

۱) $h_a=l_a\cos\frac{B-C}{2}=\lambda_a\sin\frac{B-C}{2}$

۲) $h_b=l_b\cos\frac{C-A}{2}=\lambda_b\sin\frac{C-A}{2}$

۳) $h_c=l_c=\frac{A-B}{2}=\lambda_c\sin\frac{A-B}{2}$

۴) $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$

۵) $4R=r_a+r_b+r_c-r$

۶) $16R^2=r^2+r_b^2+r_a^2+r_c^2+a^2+b^2+c^2$

۷) اگر O مرکز دایر محیطی و I مرکز دایره محاطی و H محل تلاقی ارتفاعات باشد،

$$OH^2=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$$
$$OI^2=R(R-2r)$$

۸) $abc=4prR$.

# VI معادلات مثلثاتی

۳۸ - **معادلهٔ مثلثاتی** بیان تساوی بین دو عبارتست. که هریک شامل یك خط یا چندخط مثلثاتی یك یاچندقوس باشند

و تساوی آنها بازاء برخی ازمقادیر این قوسها محقق گردد. این مقادیر را **جواب** های معادلهٔ مثلثاتی گویند.

۳۹ - معادلهٔ یك مجهولی آنست که فقط یك قوس یا مضارب آن درآن مجهول باشند. اگرمقدار قوسهای مجهول از یك تجاوز کند معادله چند مجهولی خواهد بود.

**۱ - معادله یك مجهولی** - بردو نوع است:

۴۰ - **نوع اول** - معادله ای که فقط شامل یك خط مثلثاتی قوس مجهول باشد: برای حل آن باید همان خط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد ومعادله را بطریق جبری حل نمود. پس از بدست آمدن مقدار مجهول قوسهای متناظر با آن خط مثلثاتی جوابهای مسئله اند.

مثلادرمعادله $۱ - ۲\cos x = ۰$ پس ازحل $\cos x = \frac{۱}{۲}$ میشود. پس $\cos x = \cos \frac{\pi}{۳}$ ودرنتیجه $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۴۱ - **نوع دوم** - معادله ای که شامل چندین خط مثلثاتی قوس مجهول باشد:

برای حل آن باید یکی ازخطوط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد وسایر خطوط مثلثاتی را بآن خط تبدیل و مطابق حالت اول عمل نمود.

درمعادلات نوع دوم برای انتخاب مجهول معاون از قاعده بیوش میتوان استفاده نمود:

۴۲ - **قاعده بیوش** Bioche - ۱ - اگر درمعادله‌ای

قوس $x$ را به $(-x)$ تبدیل کنیم ومعادله تغییر نکند $\cos x$ را مجهول معاون میگیریم.

۲ ـ اگر درمعادله قوس $x$ را به $(\pi - x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\sin x$ را مجهول معاون قرارمیدهم.

۳ ـ هرگاه در معادله قوس $x$ را به $(\pi + x)$ تبدیل کنیم ومعادله تغییرنکند $tg x$ را مجهول معاون قرار میدهیم.

٤ ـ اگر $x$ را به $(-x)$ و $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کردیم و در هر سه حال معادله تغییر کرد، باید $tg\frac{x}{2}$ را مجهول معاون قرارداد.

**۴۳ ـ حل معادلات کلاسیک** ـ غیر ازطریقه مذکور اغلب ممکن است معادلات مثلثاتی را بکمک دستورات مثلثاتی براههائی که آسان تر باشد حل نمود. برای نمونه طریقه حل معادلات معروف بکلاسیک را بیان میکنیم.

I) ـ **حل معادلهٔ کلاسیک** $a\sin x + b\cos x = c \quad (1)$

**حل ۱** ـ اگر $a$ و $b$ و $c$ عددی باشند $\frac{b}{a}$ را $tg\varphi$ فرض میکنیم تامعادله باینصورت درآید.

$$\sin x + tg\varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

یا

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

چون طرف دوم مقداریست معلوم $x+\varphi$ و درنتیجه x بدست می آید .

**بحث** - شرط وجود جواب این است که $1 \geqslant \frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi$

باشد : یا چون بجای $\cos^2\varphi$ مقدار آن را بر حسب b و a قرار دهیم :

$$c^2 \leqslant a^2+b^2$$

**حل ۲** - اگر a و b و c پارامتری باشند $tg\frac{x}{2}$ را مجهول معاون انتخاب میکنیم تا معادلهٔ (۱) بصورت معادلهٔ درجه‌دوم

$$(b+c)\,tg^2\frac{x}{2}-2a\,tg\frac{x}{2}+c-b=0$$

درآید که درآن شرط وجودجواب ، مثبت یامساوی صفر بودن مبین است ، یعنی

$$c^2 \leqslant a^2+b^2$$

**II) حل معادله کلاسیک** $a\,tg\,x+b\cot g\,x=c$

**حل ۱** - اگر ضرائب a و b و c عددی باشند معادله مفروض را چنین مینویسیم :

$$a\frac{\sin x}{\cos x}+b\frac{\cos x}{\sin x}=c$$

ویا

$$a\sin^2 x+b\cos^2 x\,c-\sin x\cos x=0$$

ویا

$$a\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-c\cdot\frac{\sin 2x}{2}=0$$

یعنی $$c\sin 2x+(a-b)\cos 2x=a+b$$

که مانند مسئله I حل میشود .

**حل ۲** — اگر لااقل یکی از ضرایب پارامتری باشند $tgx$ را مجهول معاون میگیریم و معادله باینصورت درمیآید :

$$a\,tg^2x - c\,tgx + b = 0$$

## III حل معادله کلاسیک

$$a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = d$$

**حل ۱** - اگرضرائب عددی باشند معادله را میتوان باینصورت نوشت :

$$b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = 2d - a - c$$

**حل ۲** - اگر لااقل یکی از ضرایب پارامتری باشند طرف دوم معادله را در $\sin^2x + \cos^2x$ ضرب وطرفین معادله حاصل رابر $\cos^2x$ تقسیم مینمائیم تا معادله

$$a\,tg^2x + b\,tgx + c = d(1+tg^2x)$$

و یا $$(a-d)\,tg^2x + b\,tgx + c - d = 0$$

حاصل شود که بآسانی میتوان آنرا حل وبحث نمود .

## IV حل معادلعه کلاسیک $\sin px = \sin qx$

**حل**- اگرp و q عددی باشند .

$$\begin{cases} px = 2k\pi + qx \\ px = (2k+1)\pi - qx \end{cases}$$

یعنی
$$x = \frac{2k\pi}{p-q} \quad \text{یا} \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{p+q}$$

## ب — معادلات چند مجهولی

۴۴ - بدیهیست که بتعداد مجهولها باید معادله داده‌شده باشد. پس دستگاههای معادلات چند مجهولی خواهیم داشت.

برای حل دستگاههای معادلات چند مجهولی مثلثاتی قاعده معینی نمیتوان گفت جز اینکه اصولاً معادلات چند مجهولی با استفاده ازقواعد جبری و راه حلهائی که برای حل معادلات یك مجهولی و انتخاب مجهول معاون گفته شده است حل میشوند.

۴۵ - هرگاه‌دردستگاه علاوه بر خطوط مثلثاتی خود قوسها هم وجود داشته باشند اشکال زیادتر است. تنها در دستگاههای دومجهولی که‌مجموع یا تفاضل دوقوس‌ومجموع، تفاضل ، حاصلضرب یا خارج قسمت دوخط داده شده باشند با کمك دستورهای شمارهٔ ۲۷ و ۲۸میتوان مسائل را بآسانی حل کرد . اینك چند نمونه :

I ) دستگاههائی که درآن مجموع یا تفاضل دوقوس و مجموع یا تفاضل دو جیب یا دوجیب تمام داده شده باشند :

مثال

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x + \sin y = s \end{cases}$$

از رابطهٔ

$$s = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

تفاضل $x-y$، وازروی مجموع وتفاضل دومجهول خود آنهارا بدست میآوریم.

II ) دستگاههائی که مجموع و تفاضل دو خط مثلثاتی را شامل باشند:

مثال
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

هرمعادلهٔ دستگاه را جداگانه لگارتیمی کرده‌دوحاصل را بهم تقسیم میکنیم نتیجه میشود:

$$tg\frac{x+y}{2} = \frac{b}{a}$$

و ازروی آن $x+y$ بدست‌میآید. آنگاه مقدار $\frac{x+y}{2}$ را دریکی از معادلات لگارتیمی شده دستگاه برده $x-y$ را بدست میآوریم.

III ) مجموع یاتفاضل‌دوقوس و حاصلضرب دو جیب یا درجیب تمام دردست هستند:

مثال
$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x \sin y = p \end{cases}$$

معادلهٔ دوم را بحاصلجمع و تفاضل قوسها تبدیل کرده از روی آن $x-y$ را بدست میآوریم.

IV - علاوه برمجموع یا تفاضل دوقوس خارج قسمت دو درخط ازیکنوع دردست هستند:

مثال
$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=q \end{cases}$$

معادلهٔ دوم را ترکیب وتفصیل نسبت میکنیم:

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=tg\frac{\alpha}{۲}\cot g\frac{x-y}{۲}=\frac{q+۱}{q-۱}$$

پس $x-y$ بدست میآید.

V — اگر علاوه برمجموع یا تفاضل دوقوس مجموع، تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو ظل یا دوظل تمام آنها داده شده باشند مسئله با مختصر تصرفی مانند نمونه‌های I تا IV قابل حل میشود.

مثال
$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ tgx+tgy=s \end{cases}$$

$$tgx+tgy=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\frac{۱}{۲}\left[\cos\frac{x+y}{۲}+\cos\frac{x-y}{۲}\right]}=\frac{۲\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{۲}+\cos\frac{x-y}{۲}}$$

از $\cos\frac{x-y}{۲}$ میتوان $y-x$ را بدست آورد.

## VII نامعادلات مثلثاتی

۴۶ — برای حل نامعادله مثلثاتی باید طریقهٔ حل نامعادلات جبری را بکار برد، یعنی جمیع جمل را بیکطرف نامعادله نقل کرد و پس ازانجام اعمال لازم عبارت را بحاصل ضرب عوامل تجزیه و علامت هر عامل را در فواصل جوابها تحقیق کرد و از مقایسه علامات،جوابهای نامعادله‌راتعیین نمود.

**مثال** - برای حل نامعادله $۲\sin x-\sqrt{۳}>۰$ وقتیکه $۰<x<۲\pi$ باشد ابتدا آن را مساوی صفر قرار میدهیم و جوابهایش را که عبارتند از $x=\frac{\pi}{۳}$ و $x=\frac{۲\pi}{۳}$ (جوابهای بین صفر و $۲\pi$) بدست آورده جدول ذیل‌را تشکیل میدهیم:

| x | ۰ | | $\frac{\pi}{۳}$ | | $\frac{۲\pi}{۳}$ | | $۲\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $۲\sin x-\sqrt{۳}$ | | − | ۰ | + | ۰ | − | |
| نا معادله | | جواب ندارد | | جواب دارد | | جواب ندارد | |

پس نا معادله بازاء $\frac{۲\pi}{۳}>x>\frac{\pi}{۳}$ صادق است.

## VIII حل مثلث

۴۷ - **حل مثلث** یعنی بدست آوردن اجزاء مجهول آن

از روی اجزاء معلوم بوسیله محاسبه .

۴۸ - اگر اجزاء معلوم از اجزاء اصلی مثلث (اضلاع و زوایا) باشند میگویند یك **حالت کلاسیك** است و اگر از اجزاء فرعی (اشعهٔ دوایر ، ارتفاعات و مانند آنها) باشند، یك حالت **غیر کلاسیك**.

۴۹ - روابط بین اجزاء اصلی مثلث قائم درشماره ۳۰ (۱ تا ۳) و روابط بین اجزاء اصلی مثلث غیر مشخص درشماره ۳۱ (دستگاههای I و II و III) گفته شده است . و نیز روابط بین سایر اجزاء مثلثها درشمارههای ۳۲ تا ۳۷ درج گردیده اند .

۵۰ - **تعادل دستگاهها** - درهر مثلث دستگاههای I و II و III (شماره ۳۱) متعادلند یعنی هریك را میتوان ازروی دیگری بدست آورد .

مثلا برای بدست آوردن دستگاه II از دستگاه I باینطریق عمل میکنیم :

$$A=\pi-(B+C)$$

$$\sin^2 A=\sin^2(B+C)=\sin^2 B\cos^2 C+\cos^2 B\sin^2 C$$
$$+2\sin B\sin C\cos B\cos C$$
$$=\sin^2 B(1-\sin^2 C)+\sin^2 C(1-\sin^2 B)$$
$$+2\sin B\sin C\cos B\cos C$$
$$=\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos(B+C)$$
$$=\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos B\cos C\cos A$$

و چون بجای $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ بترتیب مقادیرشان

$\frac{a}{2R}$ و $\frac{b}{2R}$ و $\frac{C}{2R}$ را که از دستگاه I بدست میآیند قرار دهیم رابطهٔ اول دستگاه II نتیجه میشود .

## ۵۱ — حل مثلث قائم در حالات کلاسیک

| | اجزاء معلوم | اجزاء مجهول | فرمولهائی که باید بکار برد |
|---|---|---|---|
| حالت اول | a ، B | c ، b ، C | $C = ۹۰ \; B$ <br> $b = a\sin B$ <br> $c = a\cos B$ |
| حالت دوم | b ، B | c ، a ، C | $C = ۹۰ - B$ <br> $c = b\cot g B$ <br> $a = \frac{b}{\sin B}$ |
| حالت سوم | b ، a | c ، C ، B | $\sin B = \frac{b}{a}$ <br> $C = ۹۰ - B$ <br> $c = a \sin B$ |
| حالت چهارم | c ، b | a ، C ، B | $tg B = \frac{b}{c}$ <br> $C = ۹۰ - B$ <br> $a = \frac{b}{\sin B}$ |

## ۵۲ - حل مثلث غیر قائم در حالات کلاسیك

| | اجزاء معلوم | اجزاء مجهول | فرمولهائیکه باید بکار برد |
|---|---|---|---|
| حالت اول | c ، a ، B | b ، A ، c | $A=\pi-(B+C)$<br>$b=a\frac{\sin B}{\sin A}$<br>$c=a\frac{\sin C}{\sin A}$ |
| حالت دوم | b ، C ، a | A ، c ، B | $\begin{cases}\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}\\ B+A=\pi-C\end{cases}$<br>$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cos C$ |
| حالت سوم | A ، b ، a | C ، B ، c | $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$<br>$C=\pi-(A+B)$<br>$c=a\cos B+b\cos A$ |
| حالت چهارم | c ، b ، a | C ، B ، A | $\cos C=\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}$<br>$\sin B=\frac{b}{c}\sin C$<br>$A=\pi-(B+C)$ |

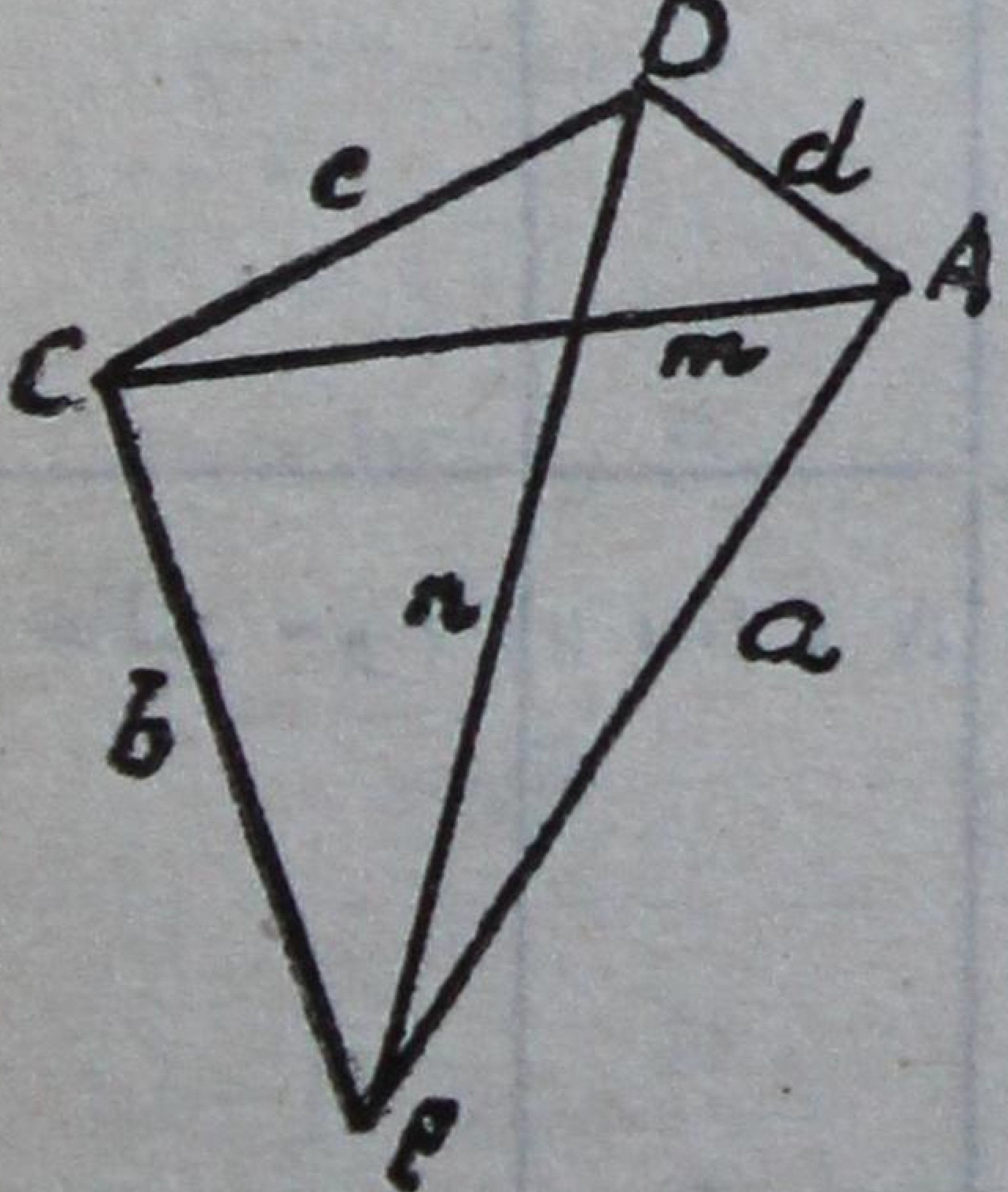
## ۵۳ - حل مثلث در حالات غیر کلاسیك - این حالات

بسیار متنوعند و بطور کلی قاعده‌ای برای آنها نمیتوان گفت فقط دو نکته اساسی ذیل خاطرنشان میشوند.

۱ - در حل و بحث مسائل بهتر است که از محاسبهٔ زوایا شروع شود، زیرا اضلاع از روی زوایا به آسانی بدست میآیند.

۲ - هرجا مجموع دو مجهول معلوم باشد خوبست تفاضل آن دو را نیز بدست آورد تا به آسانی بتوان آن ها را پیدا کرد.

## IX - چهار برهای گوژ



(ش ۲)

۵٤ - هر چهار بر گوژ (محدب) چهار ضلع و چهار زاویه دارد که بفرض معلوم بودن پنج تای آنها، بشرط آنکه اقلا دو تای آنها ضلع باشند، میتوان چهار بر را حل و رسم کرد. در چهار بر A B CD (ش۲) زوایا را به A و B و C و D و اضلاع را به a و b و c و d نمایش میدهند.

برای محاسبهٔ اجزاء مجهول چهار بر از روی اجزاء معلوم آن، آنرا بوسیلهٔ رسم دو قطر بمثلثها تجزیه میکنیم واجزاء مجهول را حساب مینمائیم.

۵۵ - **مسئله**. از چهار بری چهار ضلع و یك زاویه معلومست. زوایای دیگر را حساب کنید.

چون اقطار را m و n بنامیم (ش۲) :

درمثلث DAB میتوان n را حساب کرد ( شماره ۵۲ ، حالت دوم) و از روی آن زاویه C را بدست آورد (شماره ۵۲ حالت چهارم) . و نیز ازحل دو مثلث ADB و DCB زوایای ADB و CDB که مجموعشان زاویه D است بدست میآیند و زاویه B از رابطه $A+B+C+D=2\pi$ (هندسه) نتیجه میشود .

## ۵۶ - روابط بین اجزاء چهار بر محاطی

۱ - زوایا $A+C=B+D=\pi$

$$tg\frac{A}{2}=cotg\,\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

$$tg\frac{B}{2}=cotg\,\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}$$

۲- اقطار

$$m=\sqrt{\frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+dc}}$$

$$n=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

$$mn=ac+bd$$

$$\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

۳ - مساحت

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

۴- شعاع دایرهٔ محیطی

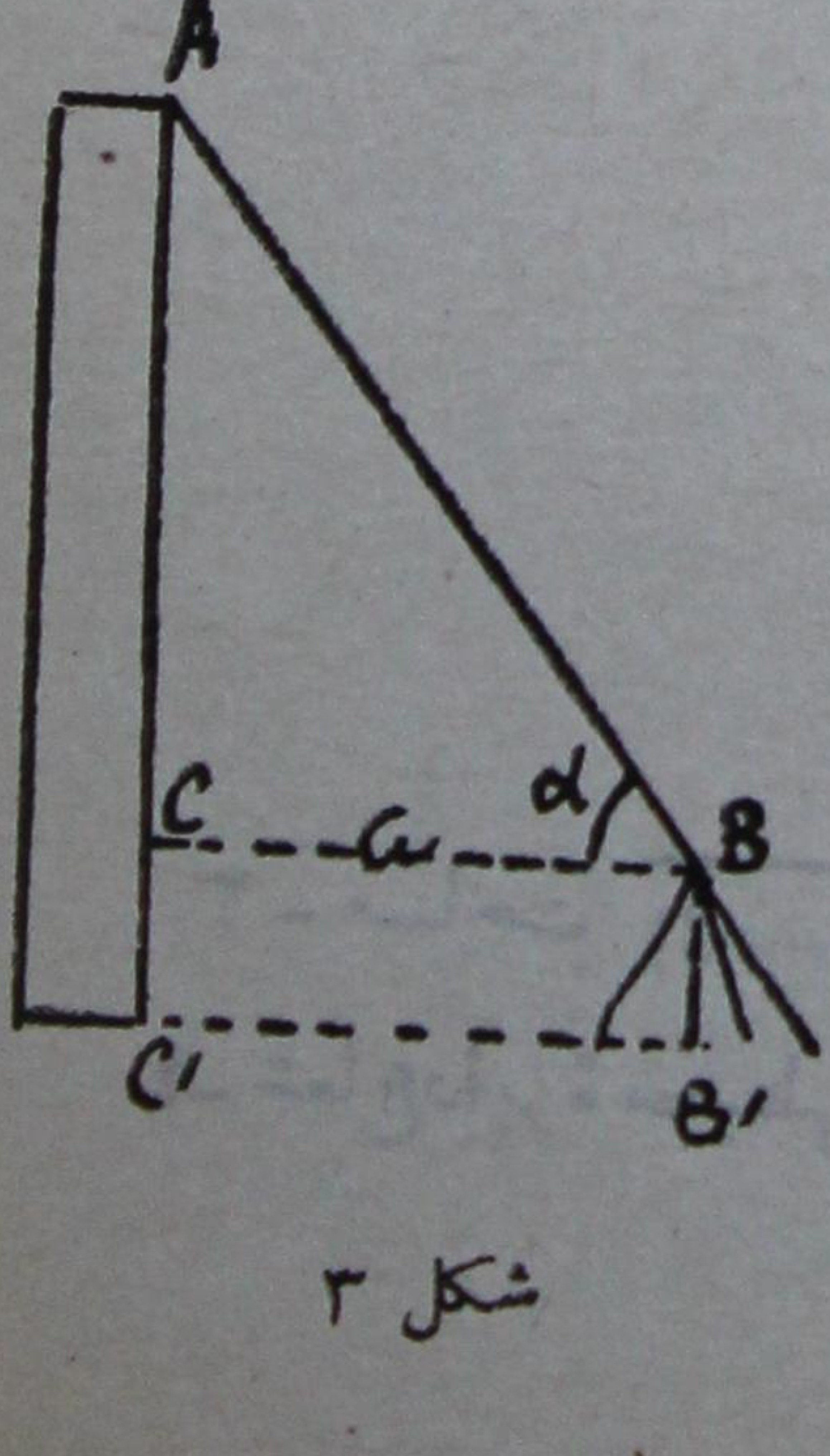
$$R=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{4S}}$$

۵ - زاویهٔ بین دوقطر $\sin\alpha = \frac{2S}{mn}$

## x - استعمال مثلثات در نقشه برداری

۵۷ - در نقشه‌برداری از یك قطعه زمین میتوان طول خطوط و مقدار زوایا را باژنجیر مساحی و زاویه‌یاب وافزار دیگر اندازه گرفت. ولی برای مراعات دقت زمین‌را بمثلثهای متعدد تقسیم میکنند و بوسیلهٔ حل آن مثلثها اجزاء آن را باکمال دقت اندازه می گیرند. این عمل را **مثلث بندی** یا Triangulation می گویند.

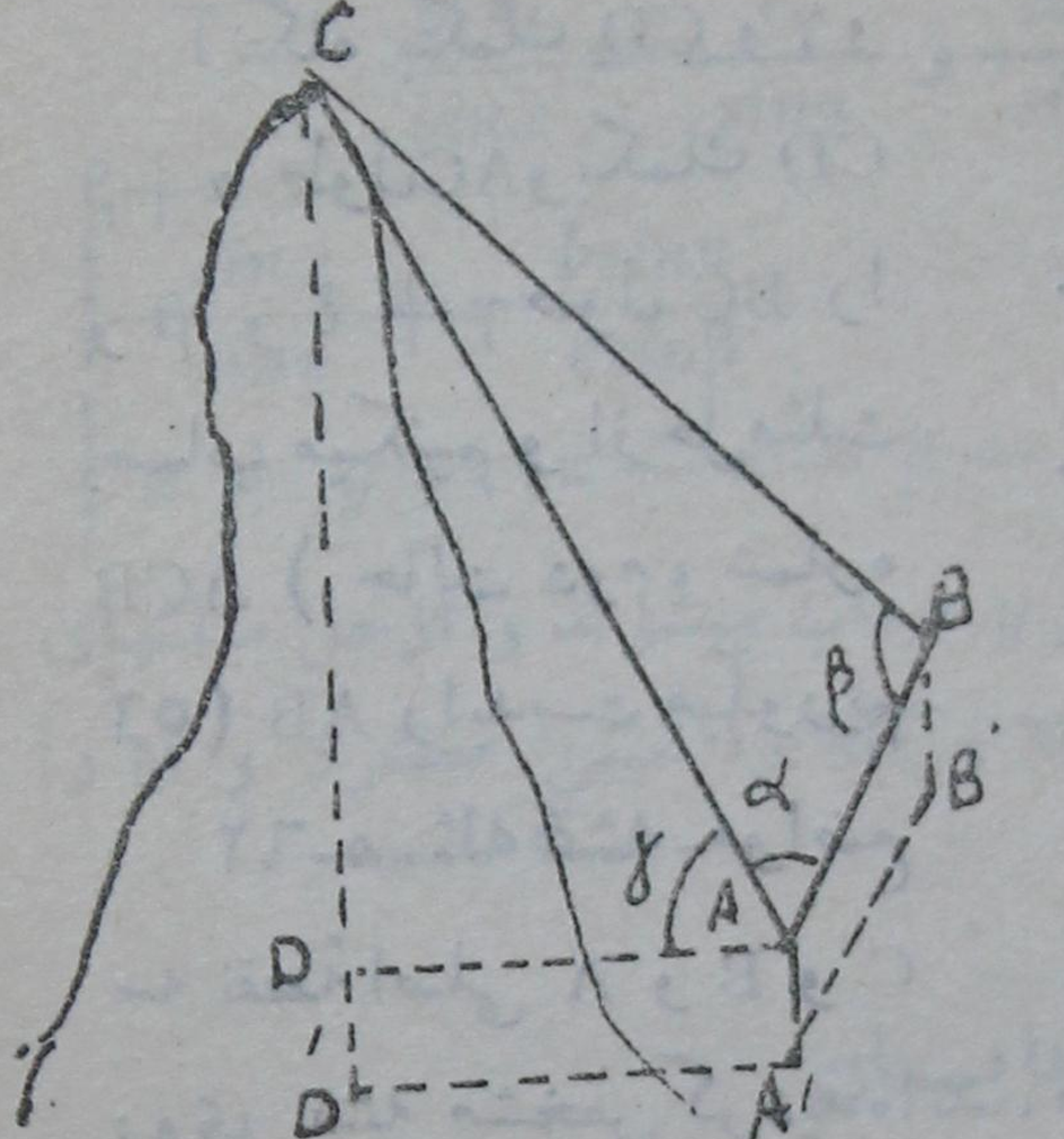
۵۸ - گاهی نیز اندازه گرفتن فاصله بین دونقطه که‌در دسترس نیستند یا اندازه گرفتن‌ارتفاعی‌لازم میآید. این‌مسائل بطریق ذیل حل میشوند.



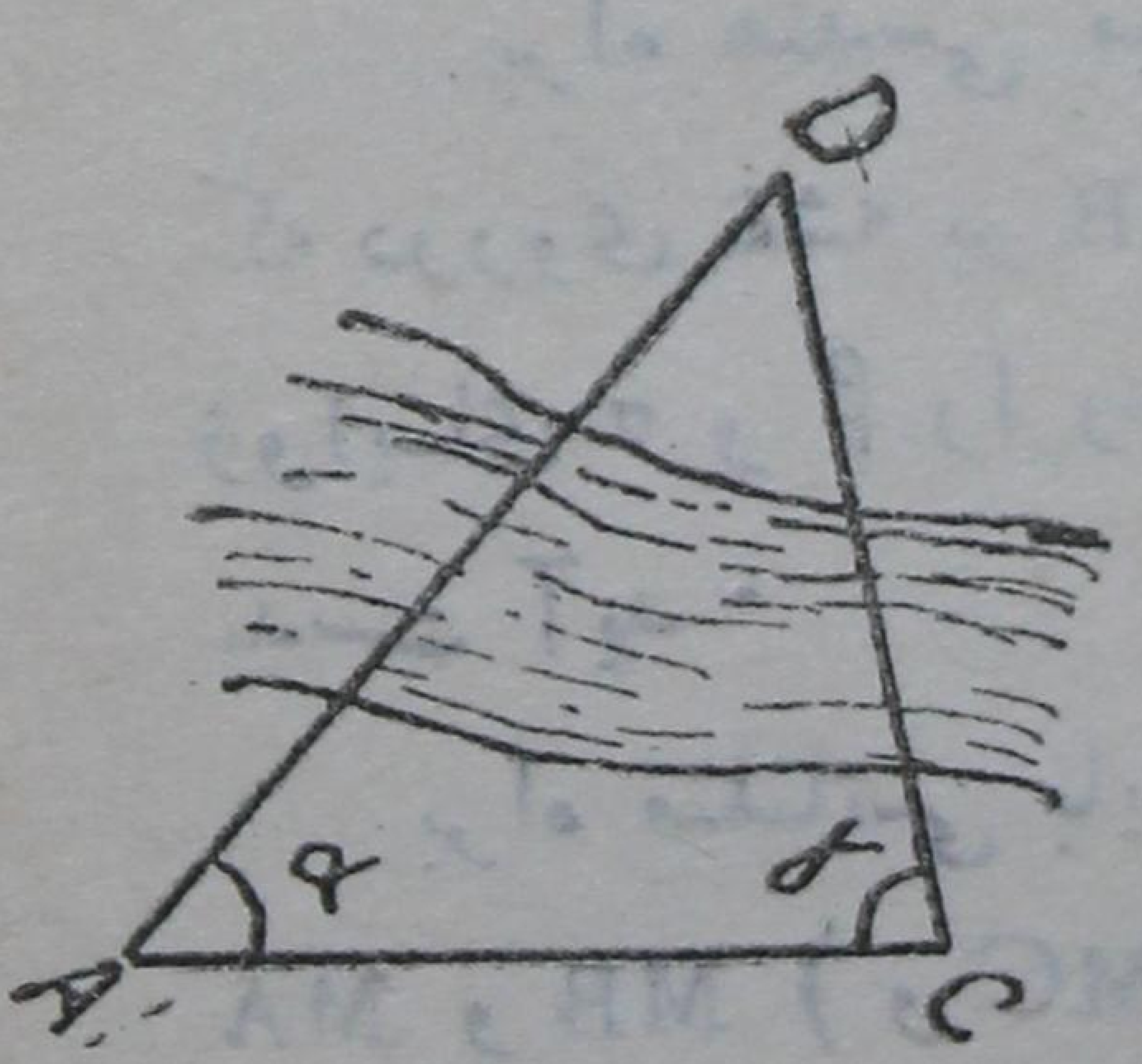

شکل ۳

۵۹ - **تعیین ارتفاع** - ۱) اگر بموقع قائمی که بر نقطه ای که می خواهیم ارتفاعش را تعیین کنیم دسترسی داشته باشیم (شکل ۳) $B'C' = BC$ را با دقت اندازه میگیریم‌وازحل مثلث ABC ارتفاع نقطه A را بدست میآوریم.

۲) اگر بموقع قائم دسترسی



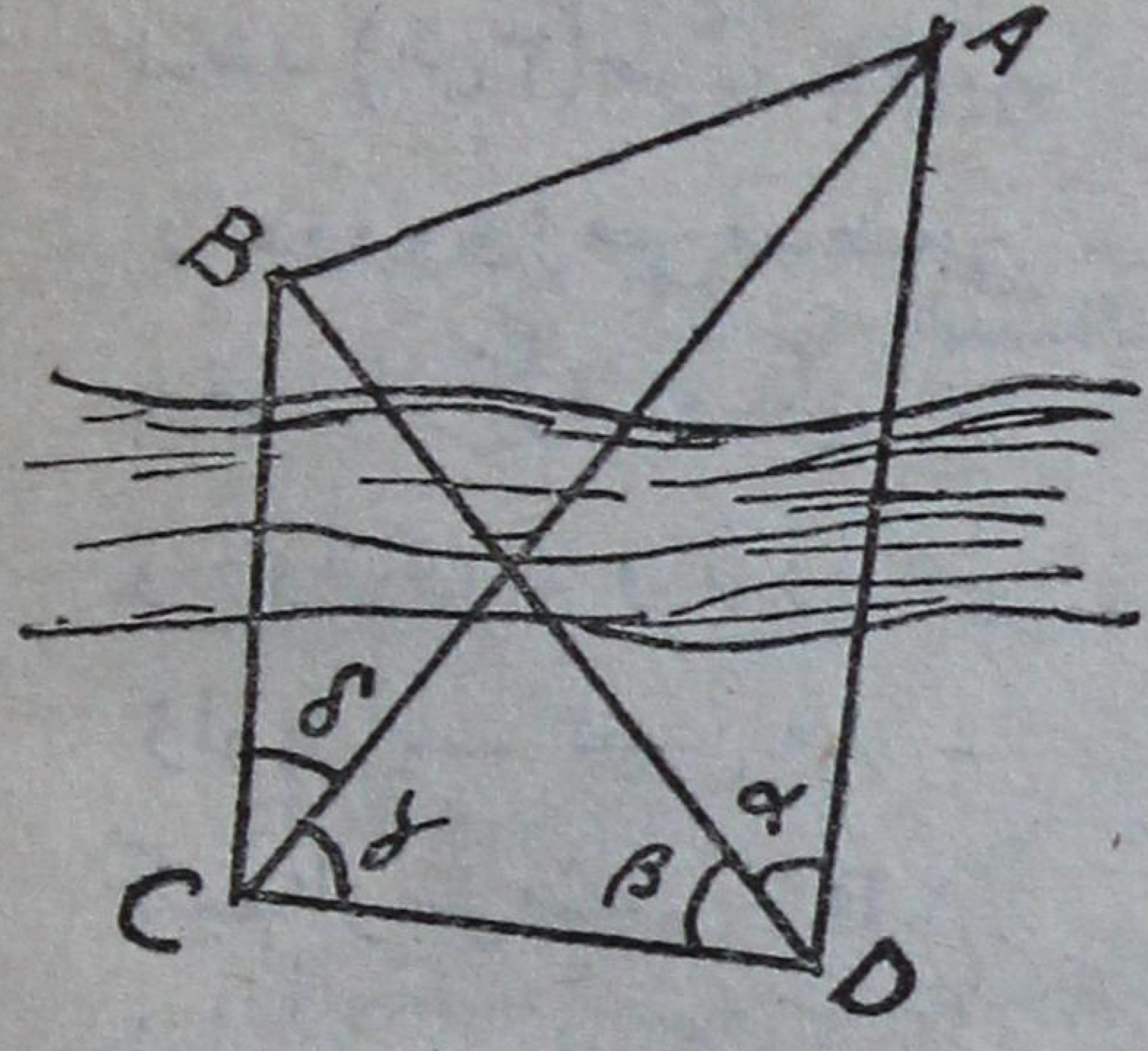

نباشد (ش۳) طول AB را در روی زمین مسطحی بدقت اندازه میگیریم و زوایای α و β را هم زاویه یاب تعیین می - کنیم؛ از حل مثلث ABC طول AC بدست میآید، آنگاه مثلث قائم CAD را با وتر AC و زاویه γ حل میکنیم تا CD (و در نتیجه CD') بدست آید (DD' مساوی ارتفاع زاویه یاب از سطح زمین است)




**۶۰ - فاصله نقطه A را از D که در دسترس نیست معلوم کنید.**

نقطه ای مانند C در نظر گرفته فاصله AC و زوایای α و γ (ش ٤) را اندازه میگیریم و مثلث ADC راحل میکنیم (حالت اول، شماره ۵۲)

۶۱ - اگر به B و A هیچیك دسترسی نباشد (ش ۵) دو نقطه C و D را در نظر گرفته فاصله CD و زوایای α و و γ و δ را اندازه میگیریم.



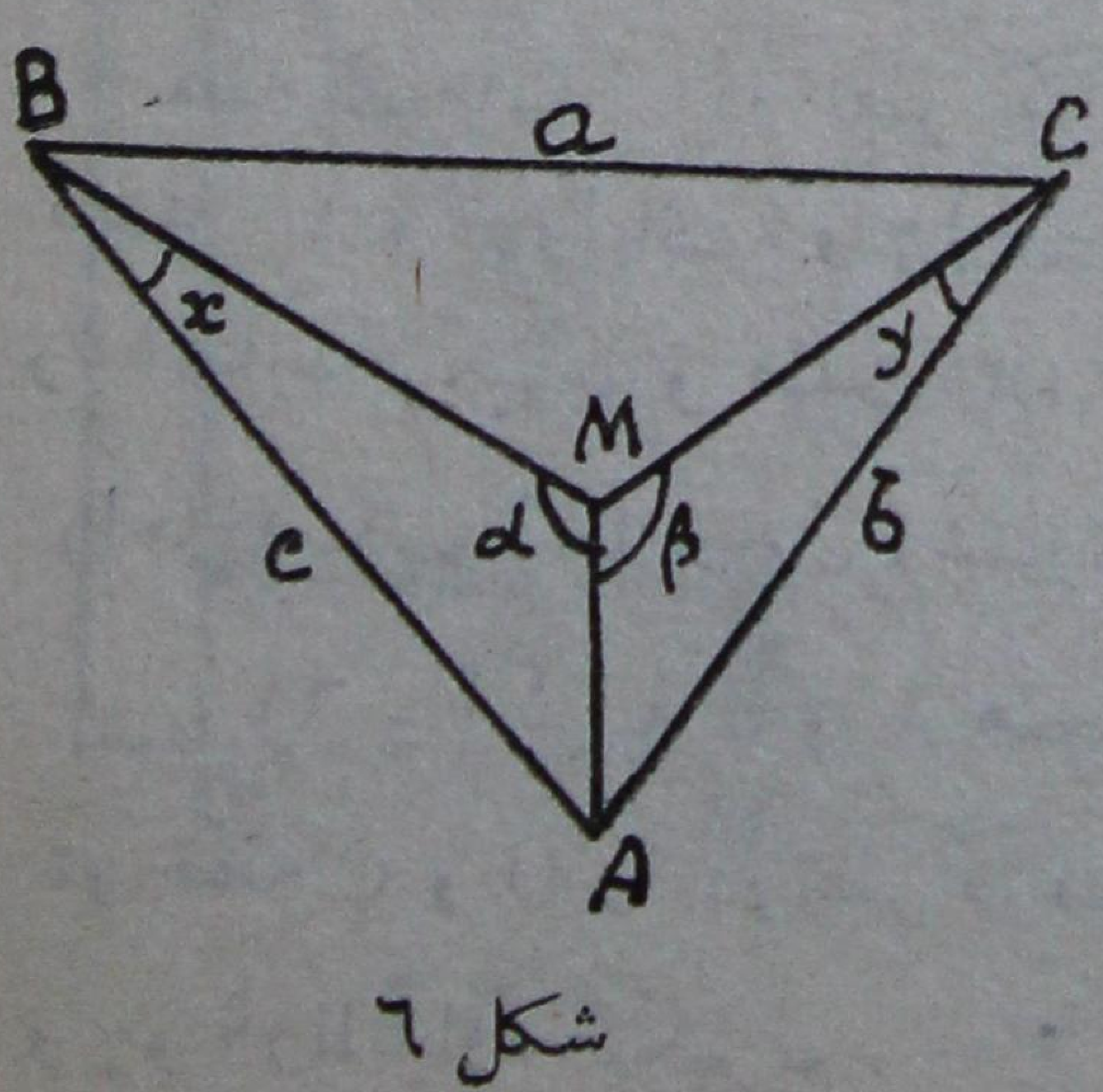

شکل ۵

آنگاه بکمک CD و $\gamma$ و $\alpha+\beta$ طول AC و بکمک CD و $\beta$ و $\delta+\gamma$ طول BC را حساب میکنیم و ازحل مثلث ACB ( حالت دوم، شماره ۵۲) AB را بدست میآوریم

**٦۲-مسئله نقشه-مواضع**

سه نقطهٔ اصلی A و B و C روی نقشه مشخص گردیده‌اند، میخواهیم وضع نقطهٔ M را در روی نقشه معین نمائیم در صورتیکه میدانیم از M قطعهٔ AB بزاویهٔ $\alpha$ وقطعهٔ AC بزاویهٔ $\beta$ دیده میشود (ش٦)

براه هندسی میتوان این مسئله را حل کرد باین معنی که درروی نقشه بر AB و CD بترتیب قطعه دایره‌های حاوی زوایای $\alpha$ و $\beta$ را رسم نمود تا از نقاطعشان نقطهٔ M بدست آید.




شکل ٦

براه مثلثاتی باید MA و MB ( و MC ) را حساب کرد- برای این کار از معلوم بودن اجزاء مثلث ABC استفاده میکنیم.

دو مثلث AMB و AMC:

$$\frac{MA}{\sin x}=\frac{c}{\sin\alpha} \quad \text{و} \quad \frac{MA}{\sin y}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{b\sin\alpha}{c\sin\beta}\\ x+y=۲\pi-\alpha-\beta-A\end{array}\right.$$

از دستگاه اخیر $x$ و $y$ حساب میشوند و ازحل مثلثهای AMB و AMC میتوان MB و MC را تعیین کرد و M را بدست آورد.

## پایـــان

# هندسه

## I تعاریف

۱ - **جسم** چیزیست که قسمتی از فضا را اشغال کند . مقداری از فضا را که جسم اشغال میکند **حجم آن** ، فصل مشترك دوجسم یا حد هر جسم را **سطح** ، فصل مشترك دو سطح یا حد هر سطح را **خط** ، فصل مشترك دوخط یاحد هر خط را **نقطه** گویند .

۲ — **خط مستقیم** ساده‌ترین خطها و نامحدود ست . **نیم‌خط** از یکطرف و**قطعه‌خط** ازدوطرف محدودمیباشند.

۳ — **صفحه** یا **سطح مستوی** ساده ترین سطوح و آن نیز نا محدودست .

٤ — دو خط یا دو صفحه **موازی** هیچگاه یکدیگر را قطع نمیکنند .

۵ — **دایره** خط منحنی بسته‌ایست که همهٔ نقاطش از یك نقطه‌بنام **مرکز** بفاصله ثابتی بنام **شعاع** باشند .

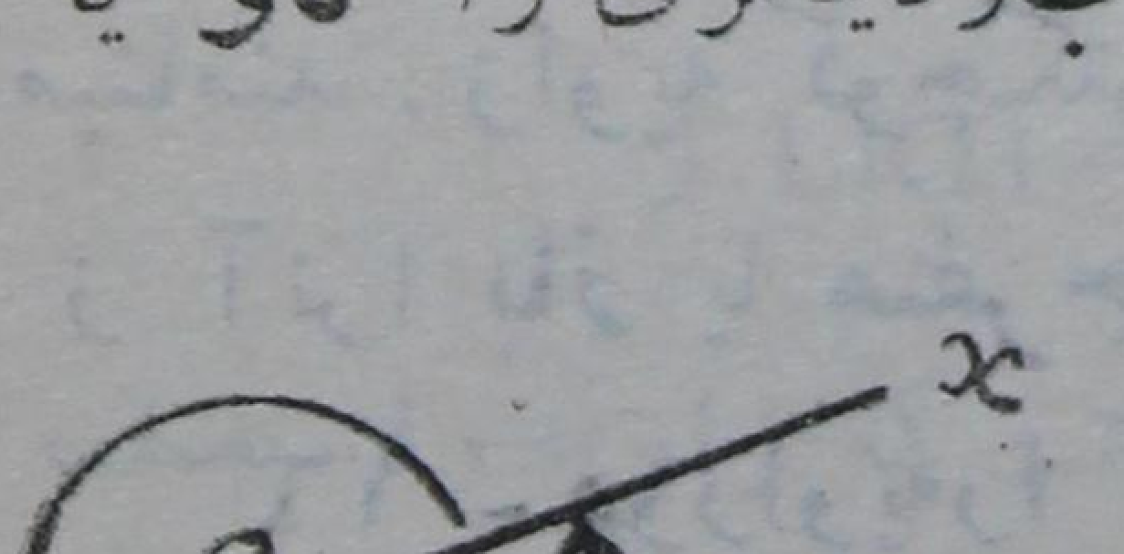
٦ — **حکم** عبارتست از بیان یك فرض و یك مستنبط . **اصل متعارفی** حکمیست که بی دلیل واضح باشد . **اصل موضوع** حکمیست که تعبداً پذیرفته شود . **قضیه** حکمیست که اثباتش محتاج باقامه **برهان** باشد .

۷ — حقایق هندسی مبتنی بر سه اصل ذیل هستند: ۱) برد و نقطه فقط یك خط میگذرد ۲) از یك نقطه فقط یك خط موازی خط دیگر میگذرد (اصل موضوع اقلیدس). ۳) هرشکل را میتوان در صفحه یا فضا جابجا کرد بی آنکه درآن تغییری پیدا شود.

۸ — **مکان هندسی** عبارتست از مجموع نقاطی که همه یك خاصیت هندسی داشته باشند.

## II - زوایا و خطوط عمود برهم

۹ — زاویه یا گوشه قسمتی از صفحه است که بین دو نیم خط متقاطع محصور باشد. نقطه تلاقی دوخط را **تارك** یا **راس** وهرخط را **پهلو** یا**ضلع** گویند. هر دو نیم خط با یکدیگر دوزاویه میسازند، آنراکه کوچکتراست (ومعمولا مراد از زاویه همانست) **کوژ** یا **محدب** ودیگری را **کاو** یا **مقعر** گویند(ش۱)



ش ۱

۱۰ — ممکنست درصفحه جهت مثبت و منفی قائل شد. مثلا جهت دوران عقربه های ساعت را منفی و جهت مخالف دوران عقربه‌ها رامثبت فرض کرد. در اینصورت زاویه هم مثبت یا منفی تواندبود. اگر یك ضلع برای اینکه بضلع دیگر نزدیك شود درجهت مثبت دوران کند زاویه مثبت است وگرنه منفی (درش۱ xoy

منفی و yox مثبت است) .

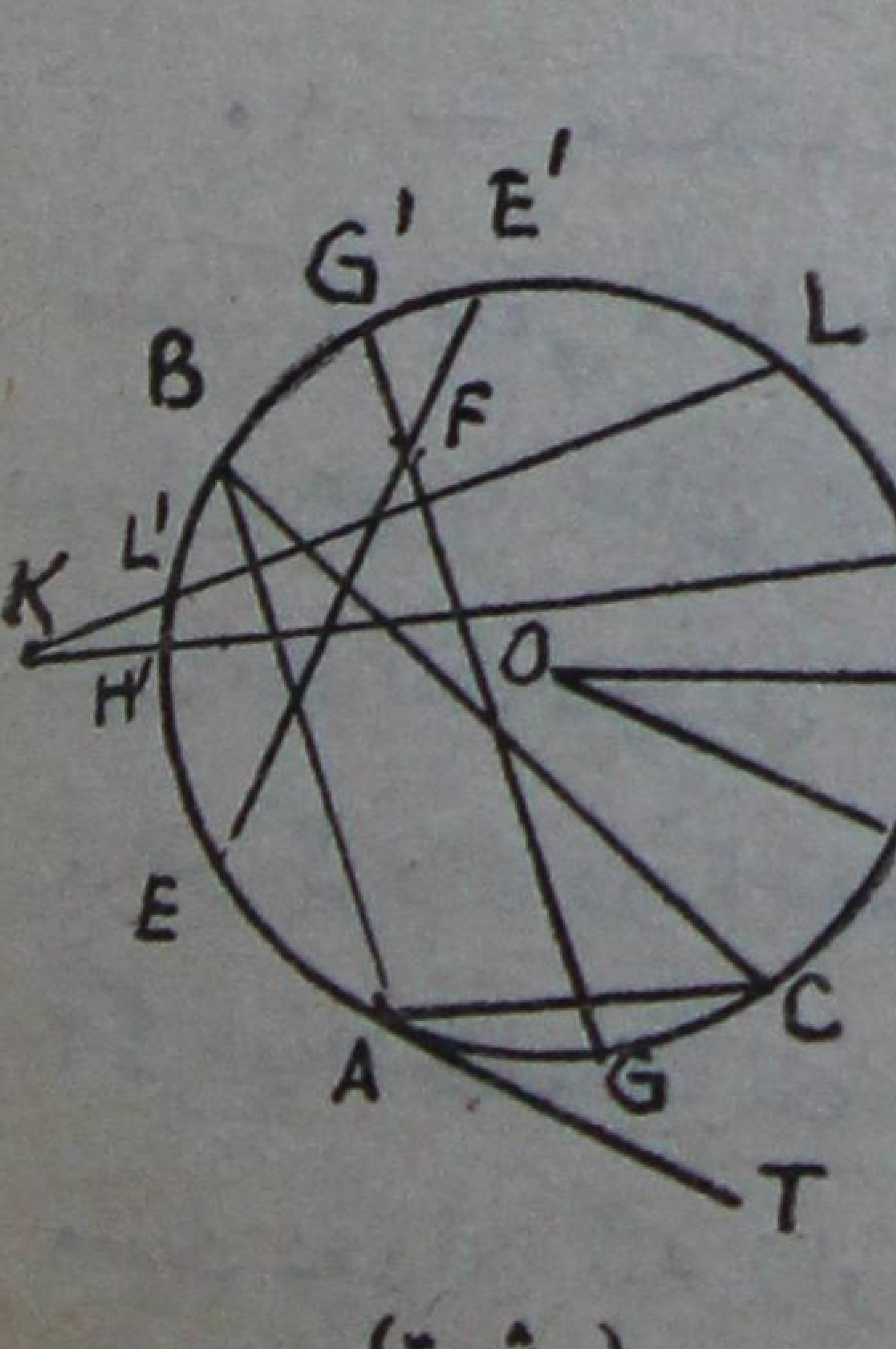
۱۱ — **قضیه** — از یك نقطه فقط میتوان یك عمود بر خطی رسم کرد .

۱۲ — نتیجه — خطوط عمود بریك خط باهم موازیند.

۱۳ — **اندازهٔ زاویه** — زاویه را با درجه و گراد و رادیان اندازه میگیرند . ( رجوع شود بقسمت مثلثات ، شماره ۲ ، صفحه ۱۲۹)

۱٤ — دو زاویه **مجاور** یك ضلع مشترك دارند . در زاویه مجاور که اضلاع غیرمشترکشان بریك امتداد باشند **مجانب** نام‌دارند . دو زاویهٔ **متقابل** آنند که اضلاعشان بریك استقامت باشند .

۱۵ ـ اگر دو زاویه مجانب باهم برابر باشند هر یك را **قائمه** یا **راست** و ضلع مشترکشان را برضلع دیگر **عمود** مینامند . زاویه کوچکتر از قائمه‌را **تند** یا **حاده** و بزرگتر ز آنرا **باز** یا **منفرجه** میگویند .



( ش۲)

۱٦ ـ دوزاویه‌را که‌مجموعشان یك قائمه باشد**متمم** و دو زاویه را که مجموعشان دوقائمه باشد **مکمل** گویند .

۱۷ ـ هرگاه دایره ای در نظر گرفته شود : **زاویه‌مرکزی** آن است که تارکش بر مرکز دایره

باشد (MON)، گوشهٔمحاطی رأسش بر محیط دایره است (ABC)، یك ضلع **گوشهٔظلی** بر دایره مماس است(TAC) راس **زاویه درونی** درداخل دایره ( EFG ) ورأس زاویه بیرونی خارج دایره (LKH) است . در گوشه محاطی ABC قوس BAC را **حاوی** زاویه ABC گویند.

اندازه زاویه مرکزی قوس مقابل آنست :MN ق = MON ز

« « محاطی نصف« « « $ز ABC = \frac{۱}{۲}$ ق AC:

« « ظلی « « « $ز TAC = \frac{۱}{۲}$ ق AC:

« « درونی نصف مجموع دو قوس مقابل آنست :

$$ز EFG = \frac{۱}{۲}(ق EG + ق E'G')$$

اندازه زاویه بیرونی نصف تفاضل دو قوس مقابل آنست :

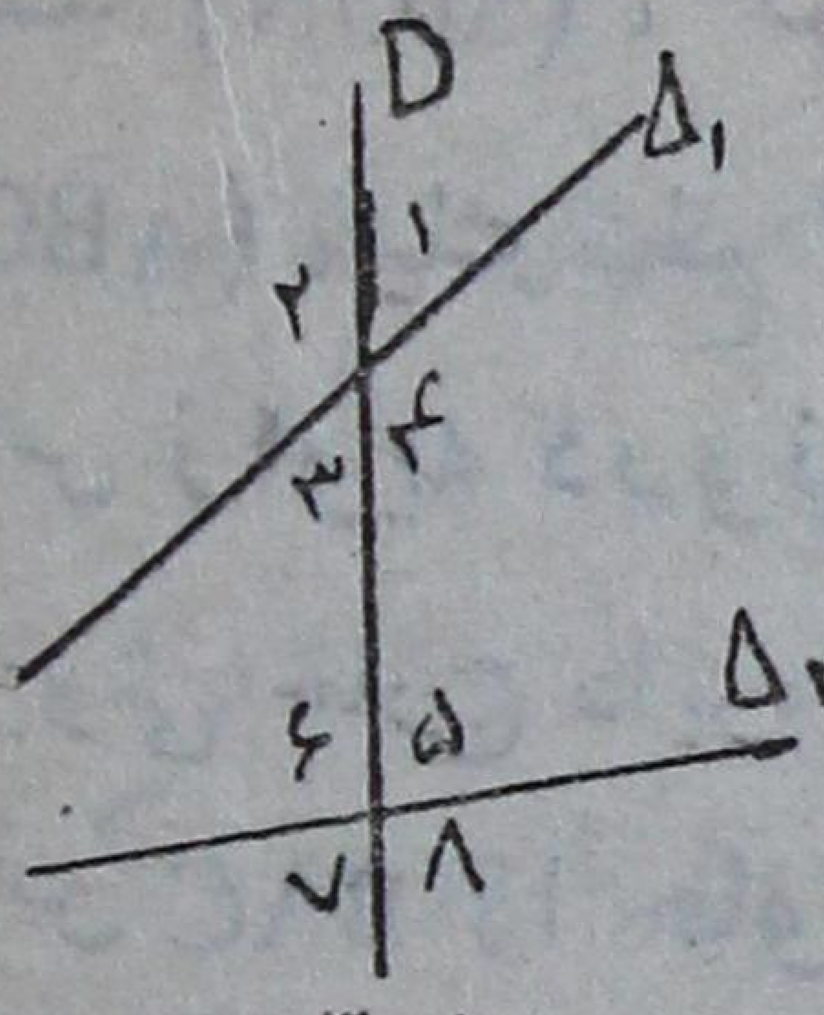
$$ز LKH = \frac{۱}{۲}(ق LH - ق L'H')$$

۱۸ - **نیمساز زاویه** خطی است که زاویه را نصف میکند .

۱۹ - نیمساز هر زاویه زاویه متقابل آن را هم نصف میکند .

۲۰ - نیمسازهای دو زاویه مجانب بر هم عمودند .

۲۱ - نیمساز زاویه‌مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه بیك فاصله باشند .




۲۱-اگر دوخط $\Delta_1$ و $\Delta_2$ را خط سوم D قطع کند (ش ۳) هشت زاویه حادث میشود:

دو زاویه غیر مجاور را که دریك طرف D باشند **متقابل** و دو زاویه را که در دو طرف D باشند **متبادل** گویند؛ دوزاویه را که بین $\Delta_1$ و $\Delta_2$ باشند **درونی** و زاویه های خارج $\Delta_1$ و $\Delta_2$ را **بیرونی** نامند.

۲۲ - **قضیه** - اگر دوخط موازی را خط سومی قطع کند دو زاویه متبادل همنام باهم برابرند.

۲۳ - **قضیه عکس** - اگر دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویه متبادل همنام با هم برابر باشند دو خط اول با یکدیگر موازیند.

## ۲۴ - حالات برابری زوایا

قضیه - دوزاویه که اضلاعشان با یکدیگر موازی باشند برابر یا مکملند.

قضیه - دوزاویه که اضلاعشان بر یکدیگر عمود باشند برابر یا مکملند.

قضیه - دوزاویه متقابل برأس باهم برابرند.

## III چند برها

۲۵ — شکل حادث از تقاطع چند خط را **چند بر** گویند. هرخط را یك **ضلع** یا **پهلو** ومحل تقاطع دو ضلع را

**تارك** یا **رأس** مینامند . اگرامتداد هیچیك ازاضلاع شکل را قطع نکند چندبر را **گوژ** و گرنه **کاو** نامند . چند برمنظم آنست که همه زوایایش باهم وهمه اضلاعش باهم مساوی باشند .

زاویه بین هردوضلع یك **زاویه درونی** و آنکه بین یك ضلع و امتداد ضلع دیگر باشد **زاویه بیرونی** نام دارد . درچندبر منظم یك نقطه میتوان یافت که از همه اضلاع بیك فاصله باشد، این نقطه را مرکز مینامند . خطی را که از مرکز بریکی از اضلاع عمود شود ارتفاع Apothéme میگویند .

مجموع طولهای اضلاع **محیط** یا **پیرامون** است . **قطر** خطی است که دوتارك غیرمجاوررا بهم ربط دهد .

۲۷ ـ **قضیه** ـ مجموع زوایای درونی چند بر $n$ ضلعی $(2n-4)$ قائمه است .

۲۷ ـ **قضیه** ـ مجموع زوایای بیرونی هرچند برچهار قائمه است .

۲۸ ـ **قضیه** ـ تعداد اقطارچند بر $n$ ضلعی $\frac{n(n-3)}{2}$ است .

## IV مثلث

۲۹ ـ مثلث ساده‌ترین چند برهاست . اگر دو ضلع آن مساوی باشند **متساوی الساقین** وهریك ازدوضلع مساوی‌را ساق واگرهرسه ضلع متساوی باشند **متساوی الاضلاع** است.

اگر یك زاویهٔ آن قائمه باشد **قائم** است وضلع مقابل بزاویه قائمه را **وتر** گویند . **میانه** خطی است که از رأس بوسط ضلع مقابل وصل شود . **ارتفاع** عمودیست که ازرأس برضلع مقابل فرود آید . **عمود منصف** خطی است که بروسط یك ضلع عمود گردد .

**دایرهٔ محیطی** آنست که بر سه رأس بگذرد . **دایرهٔ محاطی** بر سه ضلع مماس میباشد . دایره **محاط خارج** هرضلع آنست که بر آن ضلع و امتداد دوضلع دیگر مماس باشد .

۳۰ - **قرارداد** . دراین کتاب هر زاویه مثلث رابایك حرف بزرك وضلع مقابل آنرا با همان حرف ولی کوچك میخوانیم .

ارتفاعات وارد بر اضلاع a و b و c را $h_a$ و $h_b$ و $h_c$؛ میانه‌های آن اضلاع را $m_a$ و $m_b$ و $m_c$ ؛ شعاع دایرهٔ محیطی راR ، از آن دایرهٔ محاطی را r و اشعهٔ دوایر محاط براضلاع a و b و c را $r_a$ و $r_b$ و $r_c$ و مساحت مثلث را S مینامیم .

درسه بر متساوی الساقین رأس مشترك دوساق را A نام میگذارند و آنرا بطور مطلق راس میگویند . درمثلث قائم رأس زاویه قائمه‌را A مینامند . محیط مثلث یعنی $a+b+c$ را $2p$ میگویند .

۳۱ - **قضیه** - مجموع زوایای مثلث ۲ قائمه است .

۳۲ - **قضیه** - درمثلث هرضلع کوچکتراست ازمجموع

بزرگتر است از تفاضل دوضلع دیگر.

$$b - c < a < b + c$$

۳۳ - **قضیه** - درمثلث متساوی‌الساقین برأس A

$$b = c \quad \text{و} \quad \hat{B} = \hat{C}$$

۳۴ - **قضیه** - درمثلث متساوی‌الساقین میانه‌های وارد بر دوساق باهم برابرند؛ همچنین ارتفاعهای وارد برساقها و نیمساز گوشه‌های مجاور دوساق.

۳۵ - **قضیه** - درمثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه قاعده ونیمساز زاویه رأس هم هست.

۳۶ - **قضیه** - درمثلث متساوی‌الاضلاع:

$$a = b = c \quad \text{و} \quad \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

۳۷ - **قضیه**- درمثلث متساوی‌الاضلاع سه ارتفاع باهم مساویند.

## حالات برابری مثلثها

۳۸ - **قضیه** - دومثلث دراین حالات باهم برابرند:

۱) اگردوضلع وزاویه بین آنهادرآن دومثلث نظیر بنظیر مساوی باشند.

۲) اگردوزاویه وضلع بین آنهادرآن دومثلث نظیر بنظیر مساوی باشند.

۳) اگرسه ضلع آنها نظیر بنظیر مساوی باشند.

۴) اگردوضلع وزاویه مقابل بضلع بزرگتردرآن دومثلث نظیر بنظیر مساوی باشند.

۳۹ - **قضیه** - اوساط اضلاع مثلث، مواقع ارتفاعات وارد براضلاع ووسط هرقطعه ازارتفاع واقع بین رأس ومحل تلاقی ارتفاعات نه نقطه‌اند واقع برروی یك دایره (دایره نه نقطه).

## تناسب وتشابه

۴۰ - **قضیه طالس** - خطی که موازی یك ضلع مثلث رسم شود دوضلع دیگررا بریك نسبت قطع میکند.

**بعکس** - خطی که دوضلع مثلث را بقطعات متناظر متناسب تقسیم کند موازی ضلع سوم است.

۴۱ - **قضیه**. خطی که‌اوساط دوضلع مثلث‌را بهم ربط دهدموازی ضلع‌سوم ومساوی نصف آنست.

۴۲ - **تعریف** - دوشکل را مشابه یا همانند گویندوقتی که اضلاع متناظرشان متناسب و زوایای متناظرشان متساوی باشند.

۴۳ - **قضیه**- دوسه‌بر دراین‌احوال باهم مشابهند:

۱ - وقتی دو زاویهٔ یکی نظیر بنظیر بادوزاویهٔ دیگری برابر باشند:

$$\text{ز}A = \text{ز}A' \qquad \text{ز}B = \text{ز}B'$$

۲ - یك زاویهٔ یکی با یك زاویهٔ دیگری‌مساوی بوده و اضلاع آن دو زاویه با یکدیگر متناسب باشند:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \qquad \text{ز}A = \text{ز}A'$$

۳ ـ سه ضلع آنها متناسب باشند .

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

٤ ـ دوضلعشان متناسب و زاویه مقابل بضلع بزرگتردر هردومساوی باشد .

٥ -- اضلاعشان بترتیب برهم عمود یاباهم موازی باشند

## خواص منصف زاویه

٤٤ — **قضیه** ـ مصنف (نیمساز) هرزاویه داخلی ضلع مقابل را بنسبت دو ضلع دیگر تقسیم میکنند .

٤٥ ـ **قضیه** ـ همچنین نیمسازهرزاویه بیرونی .

٤٦ ـ **قضیه** ـ محل برخوردنیمسازهای داخلی وخارجی با یك ضلع مثلث نسبت بدوانتهای این ضلع مزدوج توافقی یکدیگرند . (یعنی اگر نقاط مذکور راM و $M_1$ و دو راس را B و C بنامیم :

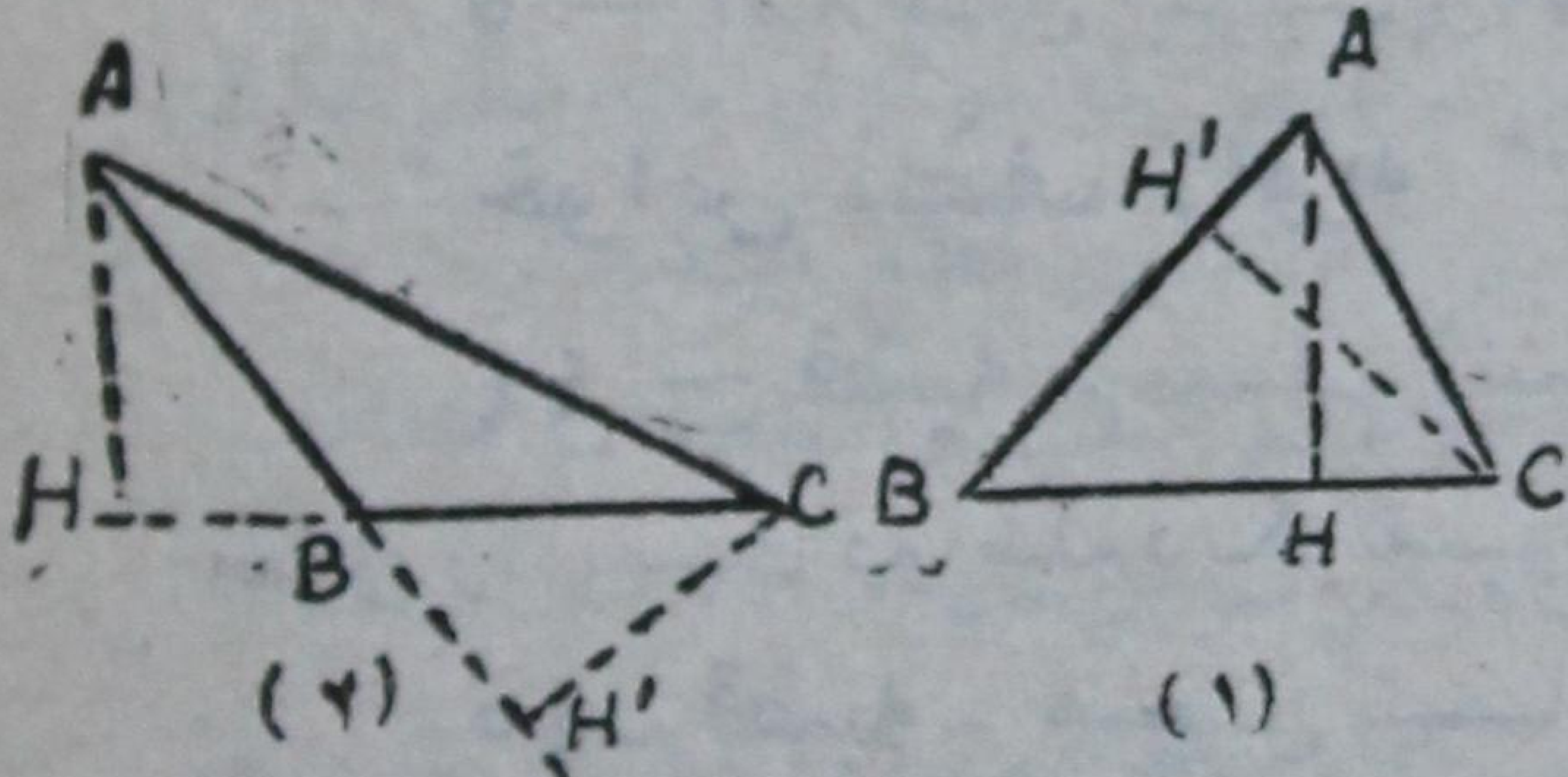
$$\frac{MB}{MC} = -\frac{M'B}{M'C}$$

٤٧ ـ **قضیه** ـ در دو مثلث مشابه ، ارتفاعات وارد بر ضلعهای متناظر ، نیمسازهای زوایای متناظر و سایر خطوط متناظر مانند شعاعهای دوایر محیطی ومحاطی برنسبت تشابه دو شکلند .

٤٨ ـ **قضیه** ـ مساحات دومثلث که یك زاویه مساوی داشته باشند برنسبت حاصلضربهای اضلاع آن زاویه‌است .

۴۹ - **قضیه** - در دو مثلث مشابه مساحات بر نسبت مربع اضلاع متناظرند.

۵۰ - **قضیه** - در هر مثلث مربع ضلع متقابل بزاویه حاده (منفرجه) مساویست با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر منهای (باضافه) دو برابر حاصلضرب یکی از آنها در تصویر ضلع دیگر بر آن




(ش ۳ و ۴)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.BH$$
$$= a^2 + c^2 - 2c.BH'$$

(ش ۴ و ۳)

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a.BH$$
$$= a^2 + c^2 + 2c.BH'$$

۵۱ - **قضیه** - مجموع مربعهای دو ضلع مثلث مساوی دو برابر مربع نصف ضلع سوم باضافه دو برابر مربع میانهٔ وارد بر این ضلع است.

**نتیجه** — مکان هندسی نقاطی که مجموع مربع های فواصلیشان از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد محیط دایره ایست که مرکز آن بر وسط خط واصل بین نقاط مفروض واقع است

۵۲ - **قضیه** - تفاضل مربعهای دو ضلع مثلث مساویست بدو برابر حاصلضرب ضلع سوم در تصویر میانه همین ضلع بر خود آن.

**نتیجه** - مکان هندسی نقاطی که تفاضل مربعات فواصلشان از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد خطی است عمود بر خط

واصل بین آن دو نقطه .

۵۳ - **قضیه استوارت** Stewart - اگر نقطهٔ D بر روی ضلع BC از سه بر $ABC$ اختیار گردد :

$$AB^{۲}.CD+AC^{۲}.BD-AD^{۲}.BC=BC.CD.DB.$$

**روابط بین اجزاء مختلف مثلث :**

۵۴) ارتفاعات :

$$h_a=\frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b=\frac{۲}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c=\frac{۲}{C}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

قطعاتی ازاضلاع که بوسیله ارتفاعات جدا میشوند :

$$BH=\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲a} \quad \text{و} \quad H=C\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲a}$$

$$CH'=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲b} \quad \text{و} \quad H'A=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲b}$$

$$AH=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲c} \quad \text{و} \quad H''B=\frac{c^{۲}+a^{۲}-b^{۲}}{۲c}$$

۵۵ — منصف زاویه‌ها - فرض میکنیم AD و BD′ و CD″ سه‌منصف‌الزاویه‌های داخلی و AD، و BD′، و CD،″

منصف‌الزاویه‌های خارجی مثلث ABC باشند :

اولاً طول قطعاتی از اضلاع که بوسیله منصف‌الزاویه های داخلی جدا شده‌اند عبارتند از :

$$\overline{BD} = \frac{ac}{b+c} \quad \text{و} \quad \overline{DC} = \frac{ab}{b+c}$$

$$\overline{CD'} = \frac{ab}{c+a} \quad \text{و} \quad \overline{D'A} = \frac{bc}{c+a}$$

$$\overline{AD''} = \frac{bc}{a+b} \quad \text{و} \quad \overline{D''B} = \frac{ca}{a+b}$$

ثانیاً طول قطعات هریك از اضلاع جدا شده بوسیله منصف‌الزاویه‌های خارجی عبارتند از :

$$\overline{D_1 B} = \frac{ac}{b-c} \quad \text{و} \quad \overline{D_1 C} = \frac{ab}{b-c}$$

$$\overline{D'_1 C} = \frac{ab}{c-a} \quad \text{و} \quad \overline{D'_1 A} = \frac{bc}{c-a}$$

$$\overline{D''_1 A} = \frac{bc}{a-b} \quad \text{و} \quad \overline{D''_1 B} = \frac{ac}{a-b}$$

ثالثاً طول هریك از مصنف‌الزاویه های داخلی عبارتست از

$$AD = \sqrt{bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+C)^2}\right]} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$BD' = \sqrt{ca\left[1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right]} = \frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}$$

$$CD'' = \sqrt{ab\left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right]} = \frac{2}{b+a}\sqrt{abp(p-c)}$$

رابعاً طول هریك ازمنصف‌الزاویه‌های خارجی عبارتست از :

$$AD_1=\sqrt{bc\left[\frac{a^2}{(b-c)^2}-\ \right]}=\frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$BD'_1=\sqrt{ca\left[\frac{b^2}{(c-a)^2}-1\right]}=\frac{2}{c-a}\sqrt{ca(p-c)(p-a)}$$

$$CD''_1=\sqrt{ab\left[\frac{c^2}{(a-b)^2}-1\right]}=\frac{2}{a-b}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

۵۶ — میانه‌ها

$$m_a=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$$

$$m_b=\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}} \qquad m_c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}}$$

## ۵ - دایره های محیطی ، محاطی ومحاط خارج

شعاع دایره محیطی $R=\frac{bc}{2h_a}=\frac{ac}{2h_b}=\frac{ab}{2h_c}$

$$=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

شعاع دایره محاطی $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{2S}{a+b+c}$

شعاع دایره محاط خارج $r_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$

$$r_b=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}} \qquad r_c=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دایره محاطی:

$p-a$ = قطعه بین راس A و نقطه تماس

$p-b$ = « « B « « «

$p-c$ = « « C « « «

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دوایر محاط خارج:

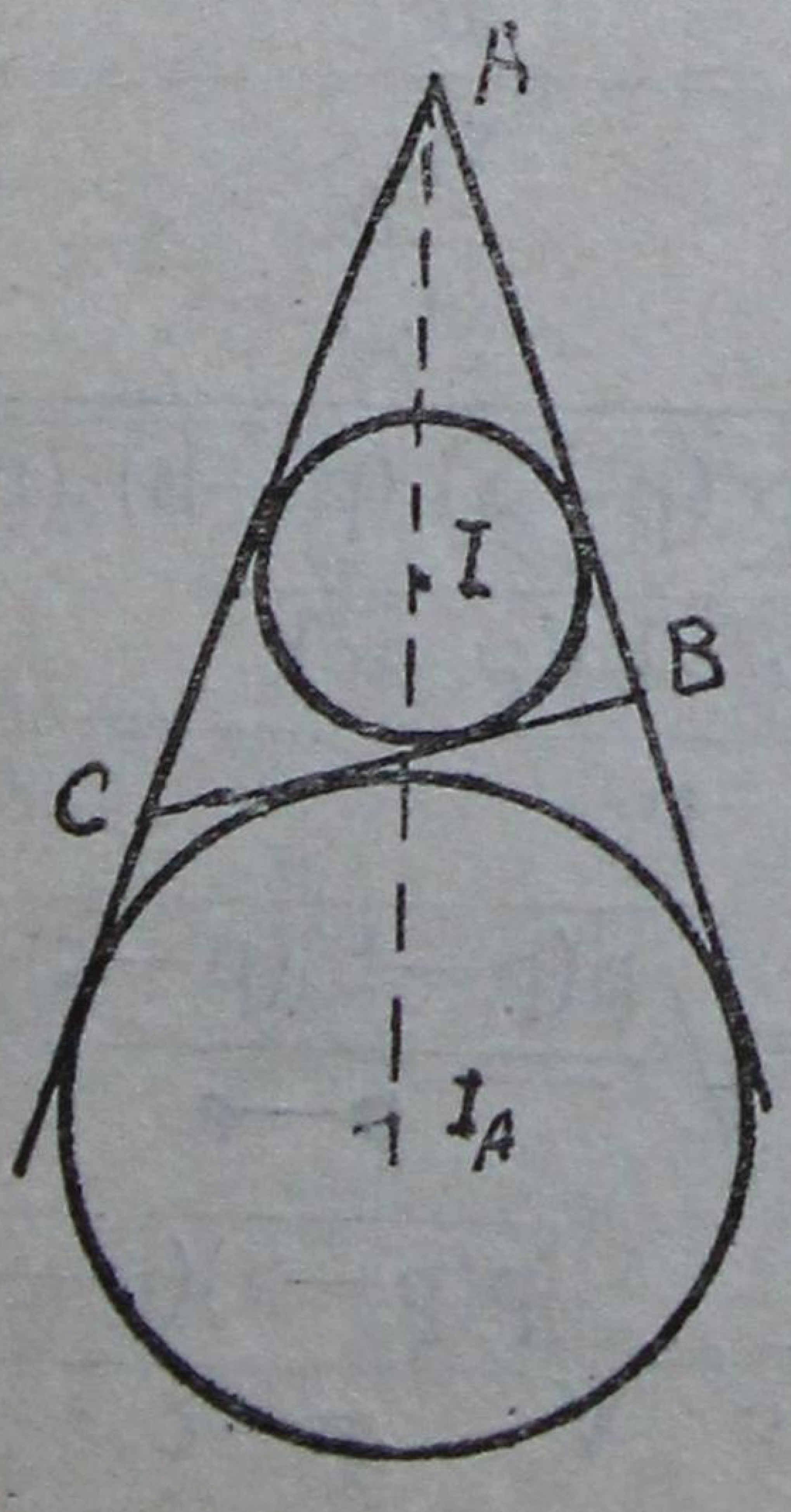
$p$ = قطعه بین A و دایره محاط خارجی ضلع a

$p-c$ = « B « « «

$p-b$ = « C « « «

قطعاتی بر روی منصف زاویه رأس A که بین مراکز دوایر و رأس A محصورند: (ش ۵)

$$AI=\sqrt{bc\frac{p-a}{p}} \qquad AI_a=\sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$$



(ش ۵)

۵۸ — قضیه ـ حاصلضرب دو ضلع مثلث مساویست با: ۱) حاصل ضرب قطعاتی که منصف زاویه درونی بر روی ضلع سوم جدا میکند، باضافه مربع این منصف زاویه. ۲) باحاصل ضرب قطعاتی که منصف زاویه بیرونی بر روی ضلع مقابل جدامیکند، منهای مربع این منصف زاویه.

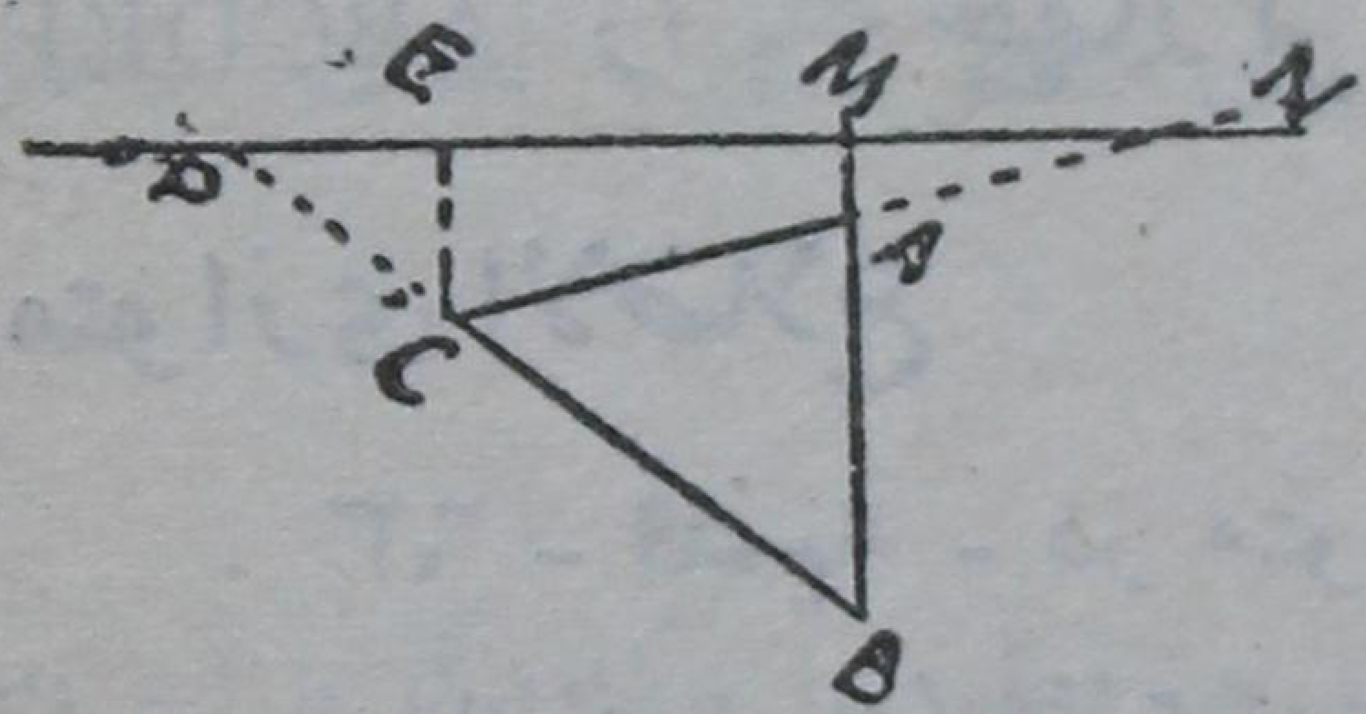
۵۹ — **قضیه** ـ مواقع منصف زوایای خارجی مثلث سه نقطه‌اند واقع بریك استقامت .

## موربات

۶۰ — **قضیه منلائوس** ـ هرگاه مورب △ سه ضلع مثلث $ABC$ (یا امتداد آنها) را در M و N و P قطع کند ( ش۶ )

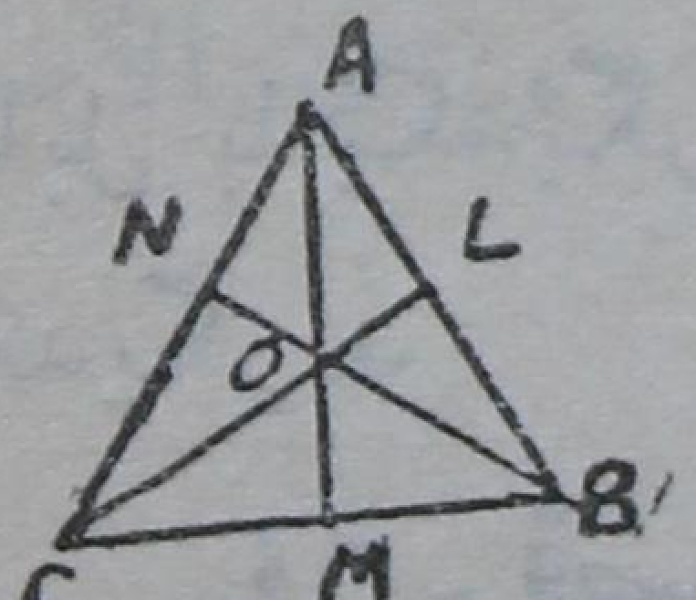
$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{pC}{pB} \cdot \frac{NB}{NA} = 1$$

۶۱ — **قضیه سوا** — هرگاه سه رأس مثلث ABC را به نقطهٔ O واقع در صفحهٔ آن وصل نموده امتداد دهیم تا اضلاع مقابل را در M و N و p قطع کنند (ش۷)




(ش۶)

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = -1$$




(ش۷)

# ۷ چهاربر (یا چهار ضلعی)

۶۲ــ **چهاربرهای مهم** ـ هرچهاربری که هردوضلع مقابل آن با یکدیگر موازی باشند **متوازی الاضلاع** است . درمتوازی‌الاضلاع هر ضلع رامیتوان **قاعده** دانست و عمودی راکه از راس مقابل بر آن فرود آید ارتفاع مینامند. **راستگوشه** یا**مستطیل** متواری الاضلاعی است که یك زاویه آن قائمه باشد ؛ **لوزی** یا **معین** متوازی‌الاضلاعی است که دو

ضلع مجاورش با هم مساوی باشند . **مربع** مستطیلی است که لوزی هم باشد. **ذوزنقه** شکلی است که دو ضلع آن با هم موازی ، و دو ضلع دیگرش ناموازی باشند ؛ دو ضلع موازی را دو قاعده و عمود مشترك بین آنها را ارتفاع ذوزنقه گویند . **چهار بر محاطی** آنست که بتوان دایره‌ای برچهار راسش گذراند . **چهار برمحیطی** آنست که بتوان دایره ای بر چهار ضلعش مماس کرد . هر گاه اضلاع مقابل چهار بر ABCD یکدیگر را در E و F قطع کنند شکل ABCDEF را یك **چهار بر کامل** مینامند .

## متوازی الاضلاع

۶۳ - **قضیه** - در متوازی‌الاضلاع ۱) هردوضلع مقابل با هم مساویند . ۲) دوقطر منصف یکدیگرند . ۳ )دوزاویه مقابل با یکدیگر مساویند . ٤ ) دو زاویه مجاور مکمل یکدیگرند .

٦٤ - **قضیه عکس** - اگر درچهار بری ۱) هردوضلع با هم مساوی و موازی باشند ؛ ۲) دوقطر منصف هم باشند؛ ۳) دوزاویه مقابل بایکدیگر مساوی باشند؛ ٤) دوزاویه مجاور مکمل هم باشند ؛ شکل متوازی‌الاضلاع است .

٦٥ - **قضیه** - محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع مرکز تقارن شکل است .

٦٦ - **قضیه** - مساحت متوازی‌الاضلاع مساویست بحاصل ضرب قاعده در ارتفاع .

## لوزی

۶۷ - **قضیه** - در لوزی دوقطر برهم عمودند .

۶۸ - **قضیه** - اگر در متوازی‌الاضلاعی دوقطر برهم عمود باشند شکل لوزیست .

۶۹ - **قضیه** - اگر دوقطر چهار بری برهم عمود و منصف هم باشند شکل لوزیست .

۷۰ - **قضیه** - هریك از دوقطر لوزی یك محور تقارن شکل است .

۷۱ - **قضیه** - مساحت لوزی مساویست با نصف حاصل ضرب دو قطر .

## مستطیل و مربع

۷۲ - **قضیه** - در مستطیل دوقطر با یکدیگر برابرند.

۷۳ - **عکس قضیه** - اگر دو قطر متوازی الاضلاع مساوی باشند شکل مستطیل است.

## ذوزنقه

۷۴ - **قضیه** - خطی که اوساط دوساق (اضلاع ناموازی) ذوزنقه را بهم وصل کند موازی قاعده ومساوی نصف مجموع دوقاعده است .

۷۵ - **قضیه** - در ذوزنقه متساوی الساقین : ۱ ) زوایای مجاور بهر قاعده برابرند . ۲) دوقطر باهم مساویند .

۷۶ - **قضیه** - خطی که از محل برخورد دو قطر ذوزنقه موازی قاعده رسم شود بوسیله دو ساق بدو جزء مساوی

تقسیم میشود .

۷۷ - قضیه - مساحت ذوزنقه مساویست با حاصلضرب ارتفاع در نصف مجموع دوقاعده .

## چهار بر محیطی

۷۸ - قضیه - در چهار برمحیطی مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دوضلع دیگر .

۷۹ -عکس قضیه - اگرمجموع دوضلع مقابل یك چهار برگوژ مساوی مجموع دوضلع دیگر باشد شکل قابل محیط شدن بردایره است .

## چهار بر محاطی

۸۰ - قضیه — در چهار محاطی زوایای مقابل مکمل یکدیگرند ،

۸۱ - اگردرچهار برمحاطی اضلاع را بترتیب a و b و c و d و اقطار را m و n ومحیط را ۲p بنامیم :

### قضیه بطلمیوس :

$$\frac{m}{n}=\frac{ad+bd}{ab+cd}$$

$$m \cdot n = ac + bd$$

$$m=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

$$n=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+ba)}{ad+bc}}$$

نتیجه :

$$مساحت\ S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$شعاع دایره محیطی = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{4S}}$$

## چهار بر کامل

۸۲ - **قضیه Gauss** - اوساط قطر چهار بر کامل بر یك امتدادند .

۸۳ - **قضیه پاپوس** - درهر چهار بر کامل هر قطر بوسیله دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم میشود .

# IV چند برهای منتظم

۸٤ - **تعریف** - درچندبر منتظم همه اضلاع با هم و همه زوایا باهم برابرند .

۸۵ - **قضیه** - چندبر منتظم قابل محاط شدن دردایره ومحیط شدن بردایره است .

۸٦ - **قضیه** - هرگاه محیط دایره را به n جزء مساوی تقسیم نمائیم : ۱) ار وصل گردن نقاط تقسیم n بر منتظم محاطی بدست میآید ۲) از تقاطع مماسهائی گه بر نقاط تقسیم رسم شوند n بر منتظم محیطی بدست میآید. ۳) اگر نقاط تقسیم را m به m بهم وصل کنیم $\overline{m}$ بر منتظم کوکبی حاصل میشود ؛ تعداد چند برهای منتظم m کوکبی مساویست با عده اعداد کوچکتر از $\frac{n}{2}$ گه نسبت به m اول باشند .

هر گاه ضلع n بر محاطی را $C_n$ و از آن n بر محیطی را $A_n$ و شعاع دایره را R و عمودی را که از مرکز چند بر محاطی بر ضلع فرود میآید ( یعنی ارتفاع apothème ) را a بنامیم این روابط را خواهیم داشت :

۸۸ - محاسبه $C_{2n}$ برحسب $C_n$ :

$$C_{2n}=\sqrt{R\left(2R-\sqrt{4R^2-C_n^2}\right)}$$

۸۸ - محاسبه $A_n$ برحسب $C_n$ : $A_n = \dfrac{2RC_n}{\sqrt{4R^2-C_n^2}}$

۸۹ - محاسبه $A_{2n}$ برحسب $A_n$ :

$$A_{2n}=\frac{2A_nR}{2R+\sqrt{4R^2+A_n^2}}$$

۹۰ - محاسبه $a_n$ برحسب $C_n$ : $a_n=\dfrac{\sqrt{4R^2-C_n^2}}{2}$

۹۱ - ضلع و ارتفاع چند بر منتظم :

۱ — سه بر $a_3=\dfrac{R}{2}$ $C_3=R\sqrt{3}$

۲ — مربع $a_4=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ $C_4=R\sqrt{2}$

۳ - پنج بر

$$C_{۵}=\frac{R}{۲}\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}\ ;\ a_{۵}=\frac{R}{۴}\left(\sqrt{۵}+۱\right)$$

۴ - شش بر : $C_{۶}=R \quad ; \quad a_{۶}=\frac{R\sqrt{۳}}{۲}$

۵ - ده بر :

$$C_{۱۰}=\frac{R}{۲}\left(\sqrt{۵}-۱\right) \quad a_{۱۰}=\frac{R}{۴}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}$$

۶ - پانزده بر :

$$C_{۱۵}=\frac{R}{۴}\left(\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۵}+\sqrt{۳}\right)$$

۹۲ — اگر $r$ شعاع دایره محیطی و $a$ ارتفاع $n$ بر منتظمی که محیطش $p$ باشد و $r'$ شعاع و $a'$ ارتفاع $۲n$ بر منتظمی که محیط آن نیز همان $p$ باشد، بین چهار مقدار $a'$ و $r$ و $a$ و $r'$ این روابط برقرار است :

$$a' = \frac{a+r}{۲} \qquad r' = \sqrt{\frac{r(a+r)}{۲}}$$

۹۳ - **قضیه** - مساحت چند بر منتظم برابر است با حاصل ضرب نصف محیط در ارتفاع آن .

۹۴ - **قاعده** - برای بدست آوردن مساحت چند بر نامنتظم آنرا بوسیله رسم قطرها بسه برها و ذوزنقه ها تقسیم میکنیم و مساحتهای اجزاء آنرا بیکدیگر میافزائیم .

## VII دایره

۹۵ - **قضیه** — هر قطر محور تقارن دایره است .

۹۶ - **قضیه** — خط مستقیم دایره را فقط در دو نقطه قطع میکند .

تبصره ـ اگر دو نقطه برهم منطبق شوند خطرا بر دایره مماس گویند .

### اوضاع نسبی دودایره

۹۷ — دو دایره ممکن است متخارج ،مماس خارج ، متقاطع ، مماس داخل یا متداخل باشند . فاصله مرکزدودایره را بعدالمرکزین میگویند و به d نمایش میدهند .

۹۸ – **قضیه** در دودایره متخارج $d>R+R'$

« « مماس خارج $d=R+R'$

« « متقاطع $R-R'<d<R+R'$

« « مماس داخل $d=R-R'$

« « متداخل $d<R-R'$

۹۹ – **قضیه** - دردو دایره مماس برهم خط المرکزین از نقطه مماس میگذرد .

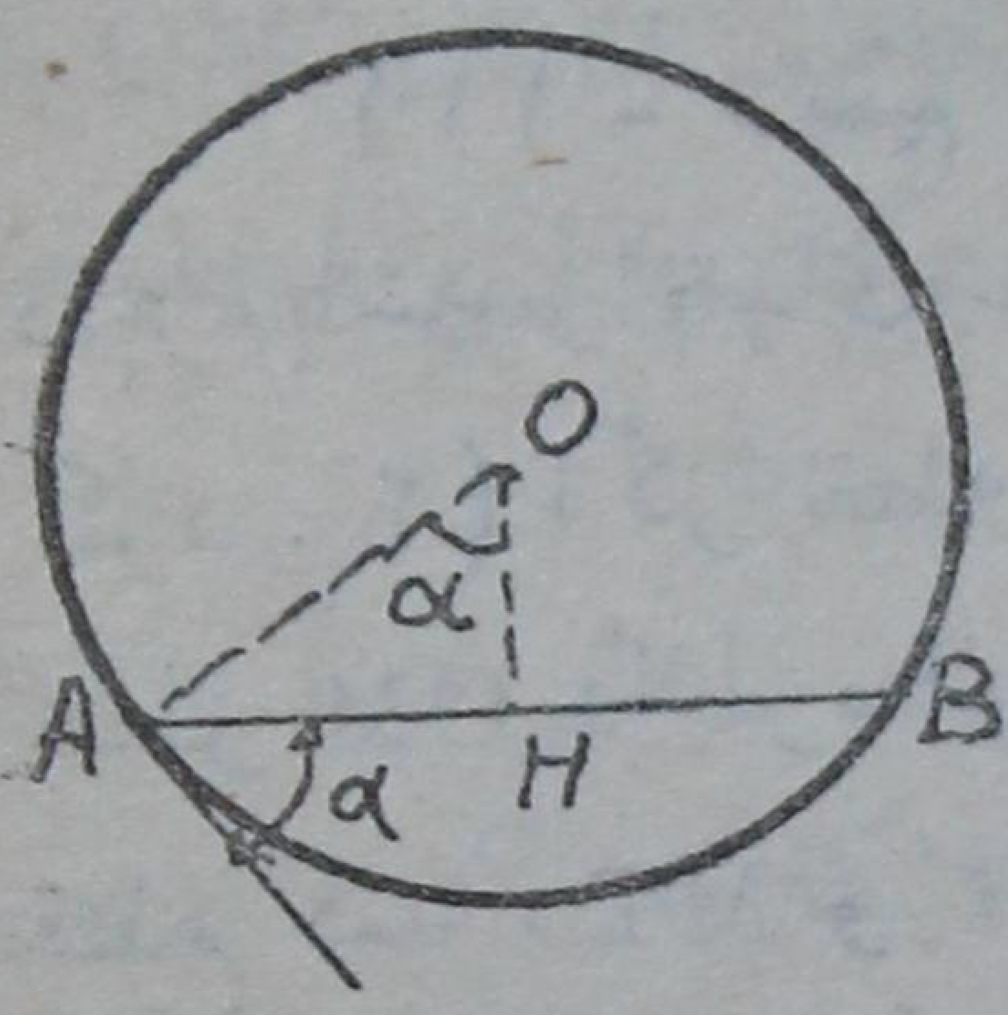
۱۰۰ - قضیه ـ دردو دایره متقاطع خط المرکزین بر وتر مشترك عمود ست .

### اندازه زاویه

۱۰۱ - برای زاویه های مرکزی ، محاطی ، ظلی ، داخلی ومقیاس آنها رجوع شود بشماره ۱۷

۱۰۲ - **قضیه** - دریك دایره یا دوایر مساوی قوسهای مساوی مقابلند بزوایای مرکزی مساوی وبعکس .

۱۰۳ - **مسئله** - بر قطعه AB دایره حاوی زاویه $\alpha$ (شماره ۱۷) را مرور دهید .



(ش ۸)

کافیست AC را چنان رسم کنیم که با AB زاویه $\alpha$ را بسازد (ش ۸) عمودی که از A بر AC اخراج شود عمود منصف AB را در O قطع میکند .O مرکز و OA شعاع دایره مطلوبست ,

## قوس و وتر

۱۰۴ - **قضیه** - هر وتر کوچکتر است از قطر.

۱۰۵ - **قضیه** - دو انتهای قطری که بریك نقطه میگذرد دورترین و نزدیکترین نقاط دایره نسبت بآن نقطه‌اند .

۱۰۶ - **قضیه** - دریك دایره وتر های مساوی مقابلند بقوسهای مساوی .

۱۰۷ - **قضیه** - ۱) دو وتر مساوی ازمرکز دایره بیك فاصله‌اند ۲) ازدو وتر نامساوی آنکه بمرکز نزدیکتر است بزرگتر است .

عکس قضیه هم صحیح است .

۱۰۸ - **قضیه** - قطر عمود بر وتر و قوس مقابل آنرا نصف میکند ,

۱۰۹ — **قضیه** — مماس بر دایره بر شعاع نقطه تماس عمود است.

۱۱۰ — **قضیه** — هرخطی که بر انتهای شعاعی عمود باشد بر دایره مماس است.

۱۱۱ - **رسم مماس بر دایره** - ۱) اگر نقطه M بر دایره باشد بر انتهای شعاعی که بر آن نقطه بگذرد خطی عمود باید کرد. ۲) اگر نقطه M بیرون دایره و O مرکز دایره باشد بقطر OM دایره ای میکشیم تا دایره مفروض را در T و T' قطع کند، MT و MT' جوابهای مسئله اند. ۳) اگر مماس باید موازی امتداد △ باشد از مرکز دایره عمودی بر △ فرود میآوریم تا دایره را دردو نقطه قطع کند و بر آن دو نقطه دو مماس میکشیم.

۱۱۲ - **تعریف** - خطی که بردو دایره مماس باشد مماس مشترك دودایره است. اگر دو دایره یکطرف مماس باشند **مماس مشترك خارجی** است و اگر دو طرف مماس باشند **مماس مشترك داخلی**.

۱۱۳ - جدول نماینده وضع دوایر و تعداد مماسهای مشترك

| وضع دود یره | خارج | مماس خارج | متقاطع | مماس داخل | متداخل |
|---|---|---|---|---|---|
| تعداد مماسهای مشترك داخلی | ۲ | ۲ | ۲ | ۱ | ۰ |
| « » خارجی | ۲ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| جمع | ٤ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ |

**۱۱٤ - قاعده رسم مماس مشترك خارجی :** اگر $O$ و $O'$ مراکز و $R$ و $R'$ شعاعهای دودایره ( $R > R'$ ) باشند وبقطر $OO'$ یك دایره‌و بمرکز $O$ و شعاع $R - R'$ دایره‌دیگری بزنیم تا یکدیگر را در $M$ و $M'$ قطع نمایند ، ازO به $M$ و $M'$ وصل میکنیم و از محل تقاطع $OM$ و $OM'$ با دایره $O$ خطوطی موازی $OM$و $OM'$ میکشیم؛ این خـطوط مماسهای مطلوبند .

۱۱۵ - برای رسم مماسهای مشترك داخلی عیناً مانند حالت قبل عمل میکنیم جـز اینکه دایره‌ایکه بمرکز $O$ رسم میکنیم بشعاع ( $R + R'$ ) خواهد بود .

## قوت نقطه

**۱۱٦ - قضیه -** چون دووتر یکدیگررا درداخل دایره قطع کنند حاصلضرب دو قطعه یکی برابر است بحاصلضرب دو قطعه دیگری .

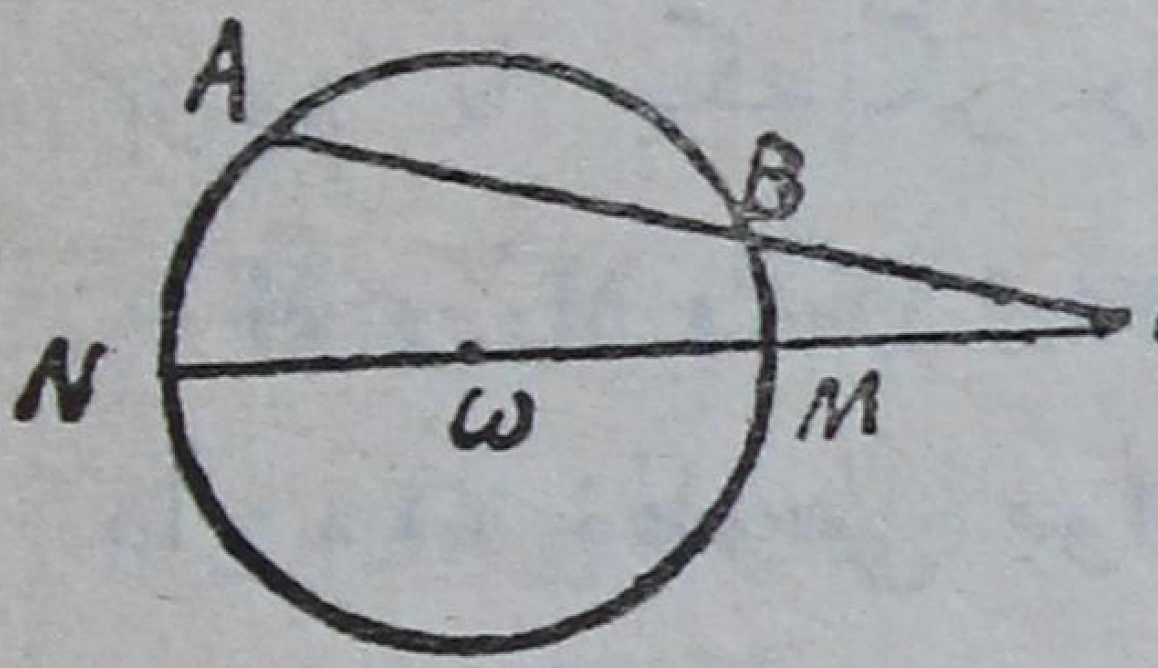
**۱۱۷ - قضیه -** هرگاه‌دوقاطع‌دربیرون‌دایره‌یکدیگر را تلاقی نمایندحاصلضرب‌هریك درجزء خارجی آن‌مساوی‌است بحاصلضرب قاطع دیگر درقسمت خارجیش .

نتیجه - اگر از یك نقطه قاطع و مماس بریك دایره رسم شوند مربع مماس مساویست باحاصلضرب تمام قاطع در جزء خارجی آن .

**۱۱۸ - قضیه -** اگر برروی دوخط که در$O$ یکدیگر را قطع کرده باشند چهار نقطه $A$ و $B$ و $A'$ و $B'$ چنان باشند

که $OA . OB = OA' . OB'$ باشد آن چهار نقطه بر محیط یك دایره قرار دارند .

**۱۱۹ - تعریف - قوت یا توان یك نقطه** نسبت بدایره حاصلضرب دو قطعهٔ قاطعی است که در این نقطه بر دایره رسم شود (ش۹)




$$p = OA \cdot OB = OM \cdot ON = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2$$

**بحث** - اگر O بیرون دایره باشد $p = d^2 - R^2 > 0$

« « « « « $p = d^2 - R^2 = 0$

« « « « « $p = d^2 - R^2 < 0$

**۱۲۰ - تعریف - محور اصلی** دو دایره مکان هندسی نقاطی است که نسبت باین دو دایره یك قوه داشته باشند .

**۱۲۱ - قضیه** - محور اصلی دو دایره خطی است عمود برخط المرکزین . اگر فاصله O و $O'$ مراکز دو دایره را d و شعاعشان را R و $R'$ و موقع محور اصلی بر خط المرکزین را H بنامیم :

$$OH = \frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a}$$

**نتیجه** - محور اصلی دوایر متحدالمرکز بفاصله بینهایت دور واقع است .

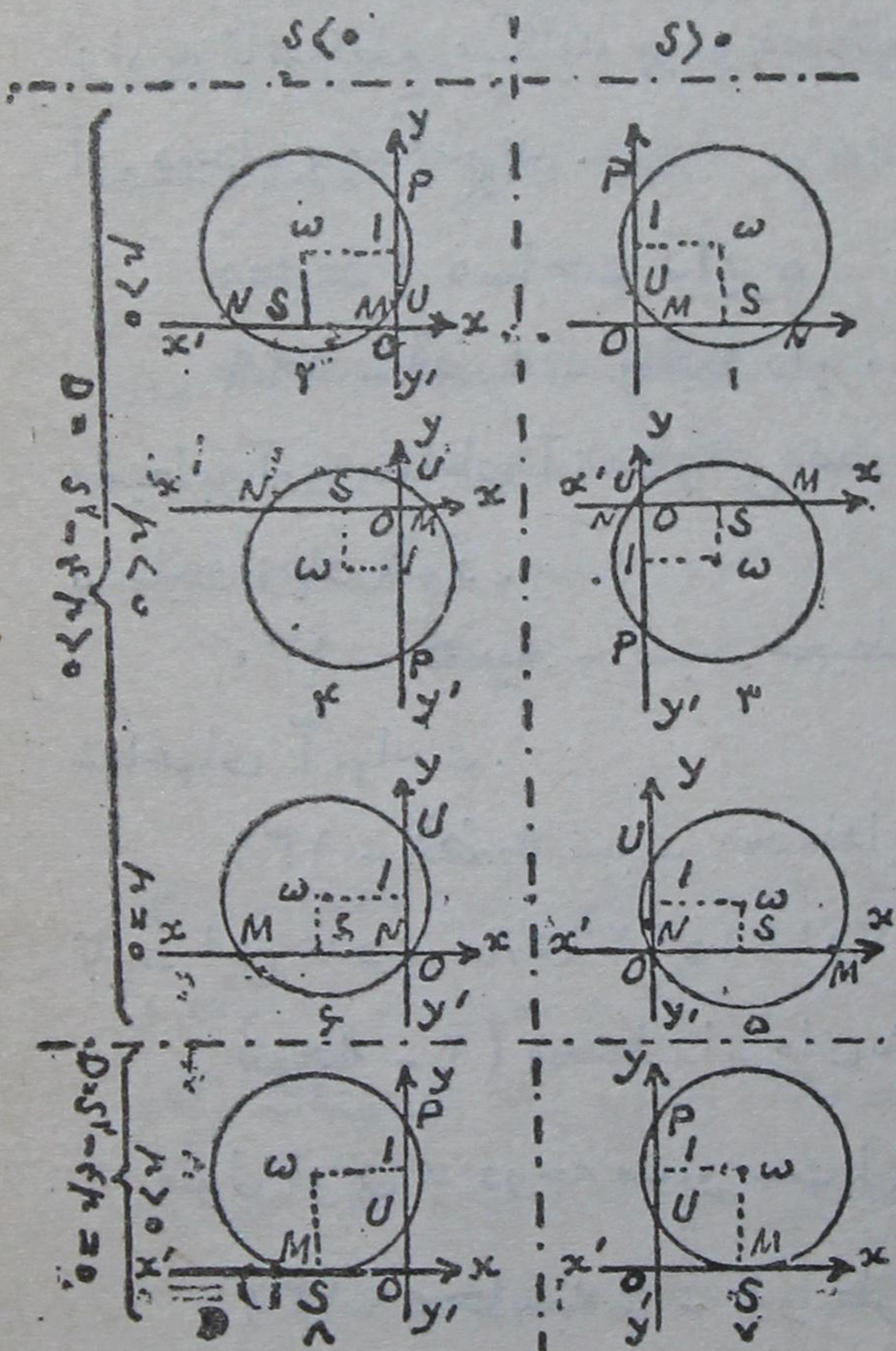
**۱۲۲ - تعریف** - چند دایره که یك محور اصلی داشته

باشندیك **دسته دایره** faisceau تشکیل میدهند .

**۱۲۳ - قضیه -** محورهای اصلی سه دایره که مراکز آنها بریك امتداد نباشند بریك نقطه میگذرند . این نقطه را مرکز اصلی سه دایره گویند .

**۱۲۴ - حل و بحث معادله درجه دوم** $x^2 - sx + p = 0$

دو محور عمود برهم Ox و Oy رسم میکنیم (ش ۱۰) در روی Oy، $OU = 1$ و $OP = p$ ودر روی Ox، $OS = \frac{s}{2}$ راجدامیکنیم، عمودمصنف PU عمودیرا که از S بر Ox خارج شود در ω قطع میکند دایره ای که بمرکز ω و شعاع ωP رسم شود Ox را در M و N قطع میکند و OM و ON جواب های معادله اند .



**دوایر عمود برهم**

**۱۲۵ - تعریف -** زاویه بین دو دایرهٔ متقاطع زاویه بین دو مماس است که ازیکی از نقاط تقاطع بردودایره رسم شوند . دودایره را که زاویه بین آنها °۹۰ باشد عمود برهم گویند

۱۲۶- **قضیه** - محوراصلی دودایره مکان مراکزدوایر عمود بر آن دودایره است .

۱۲۷ - **قضیه** - شرط لازم و کافی برای آنکه دودایره برهم عمودباشند آنست که قطریکی بوسیله دیگری بمزدوج توافقی تقسیم شده باشد .

۱۲۸ - **قضیه** - کلیه دوایری که دودایره مفروض را بزاویه قائمه‌قطع میکنند بردونقطه‌ثابت‌واقع برخطالمرکزین آن دودایره میگذرند .

## محیط و مساحت دایره

۱۲۹ - **قضیه** - محیط دایره حد مشترك محیط چندبر محیط بر آن ومحاط در آنست‌وقتی عدد اضلاع‌این چند برهاهای بینهایت زیاد شود .

۱۳۰ - **قضیه** - نسبت محیطهای دودایره‌مساوی‌نسبت شعاعهای آنهاست .

۱۳۱ - **قضیه** نسبت محیط‌دایره بقطر آن عددیست ثابت این عدد ...۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۸ = $\pi$ است .

**نتیجه** - ۱) محیط دایره‌ای بشعاع $R$ مساویست با $2\pi R$

۲) طول قوس $\alpha$ درجه مساویست با $2\pi \frac{\alpha}{360} R$

۱۳۲ - **محاسبه** $\pi$ - بدو طریق‌ممکنست : ۱) دستور محیطها که در آن حد محیط‌چندبرمحاطی در دایره ای بشعاع $R = \frac{1}{2}$ را پیدا میکنند ، زیرا در دایره ای که

$$C=2\pi R=2\pi\frac{1}{2}=\pi$$

۲ ) دستور محیط های برابر ( Isvpérimétres )
که در آن عکس شعاع دایره‌ای را که محیطش مساوی ۲ است
بدست میاورند ، زیرادرچنین دایره‌ای

$$R=\frac{C}{2\pi}=\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi} \text{ پس } \frac{1}{R}=\pi$$

۱۳۳- **قضیه** - مساحت دایره مساویست با $\pi R^2$

۱۳٤ - **تعریف** - قطاع دایره قسمتی از دایره است
محصور بین یك قوس ودوشعاع . **قطعه دایره** محصوراست
بین یك قوس ووتر آن

۱۳۵- **قضیه** - ۱) مساحت **قطاع** مساویست بحاصلضرب
قوس آن در نصف شعاع . ۲) مساحت **قطعه** مساویست بحاصلضرب
نصف شعاع درفزونی طول قوس آن بر نصف وتر قوس مضاعف
آن قوس .

## VIII بردارها

۱۳٦ - **تعریف** - بردار قطعه خطی است که دارای
**مقدار** و **امتداد** و **جهت** معین باشد . دو بردار موازی و
مساوی و دریك جهت را **همسنك** ، دو بردار **همسنك** واقع
بریك خط را **همچند** یا **معادل** خوانند . دو بردار موازی
ومساوی ولی دردوجهت مختلف را **جفت** یازوج گویند .

۱۳۷ - **مقدار جبری بردار** - مساویست با طول
( آبسیس ) منتها منهای طول مبدأ آن .

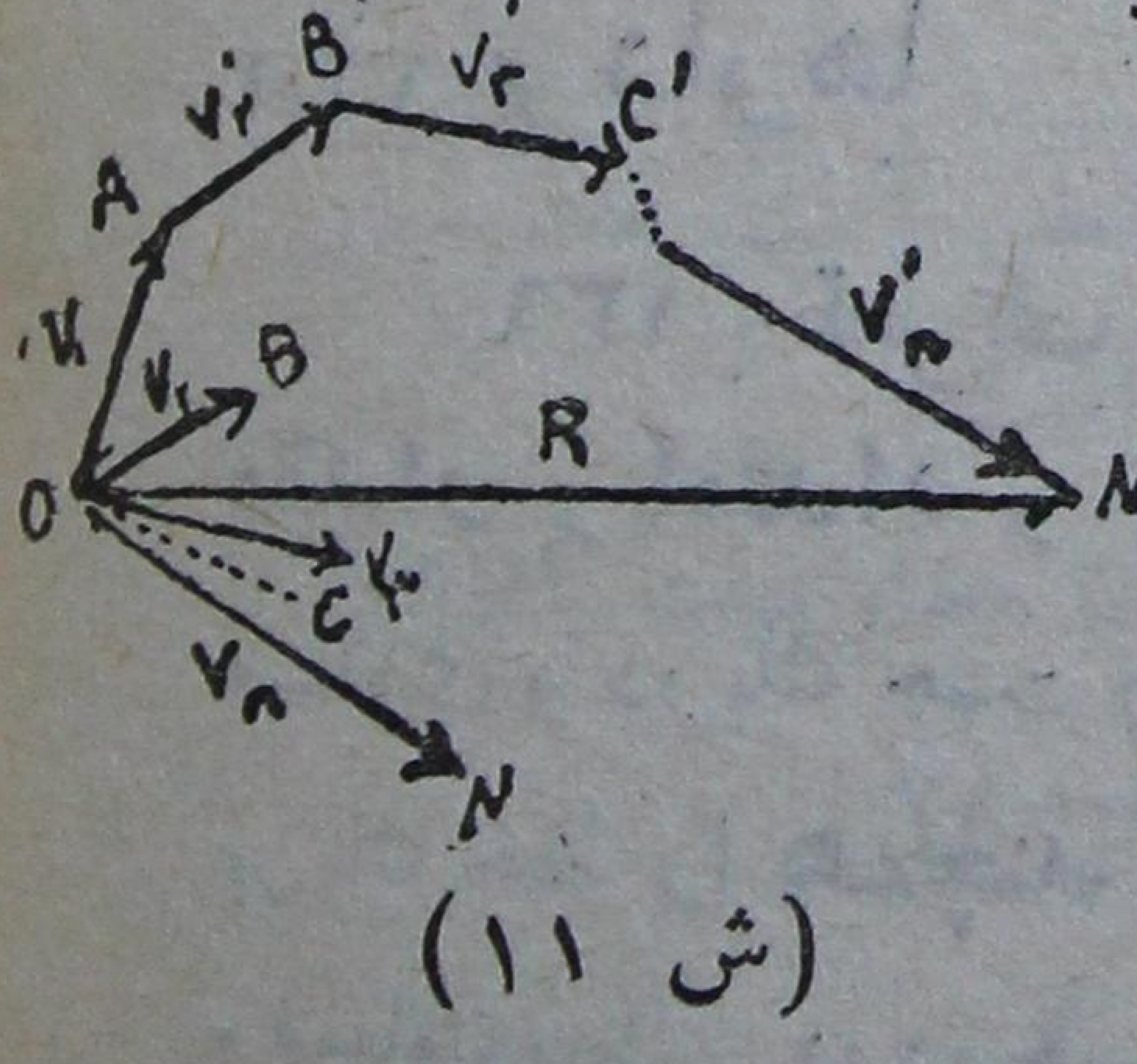
**۱۳۸ - قضیه شال - ۱)** اگر سه نقطهٔ ثابت $A$ و $B$ و $C$ بریک امتداد باشند .

$$(AB)+(BC)+(CA)=0$$

۲) اگر چند نقطهٔ $A$ و $B$ و $C$ و... $K$ و $L$ بر یک امتداد باشند :

$$(AB)+(BC)+\cdots+(KL)+(LA)=0$$

**۱۳۹ - برآیند یا مجموع هندسی چند بردار را** باینطریق بدست میآورند : ز نتهای اولی برداری همسنک دومی وازانتهای بردارجدیدبرداری همسنک سومی وازانتهای این یکی برداری همسنک چهارمی میکشند و عمل را ادامه میدهند تا همسنگهای تمام بردار های مفروض رسم شوند . آنگاه مبدأ اولین بردار را بمنتهای آخرین بردار وصل میکنند .این بردار برآیند یامنتجه یا مجموع هندسی بردارهای مفروض است . (ش۱۱)




(ش ۱۱)

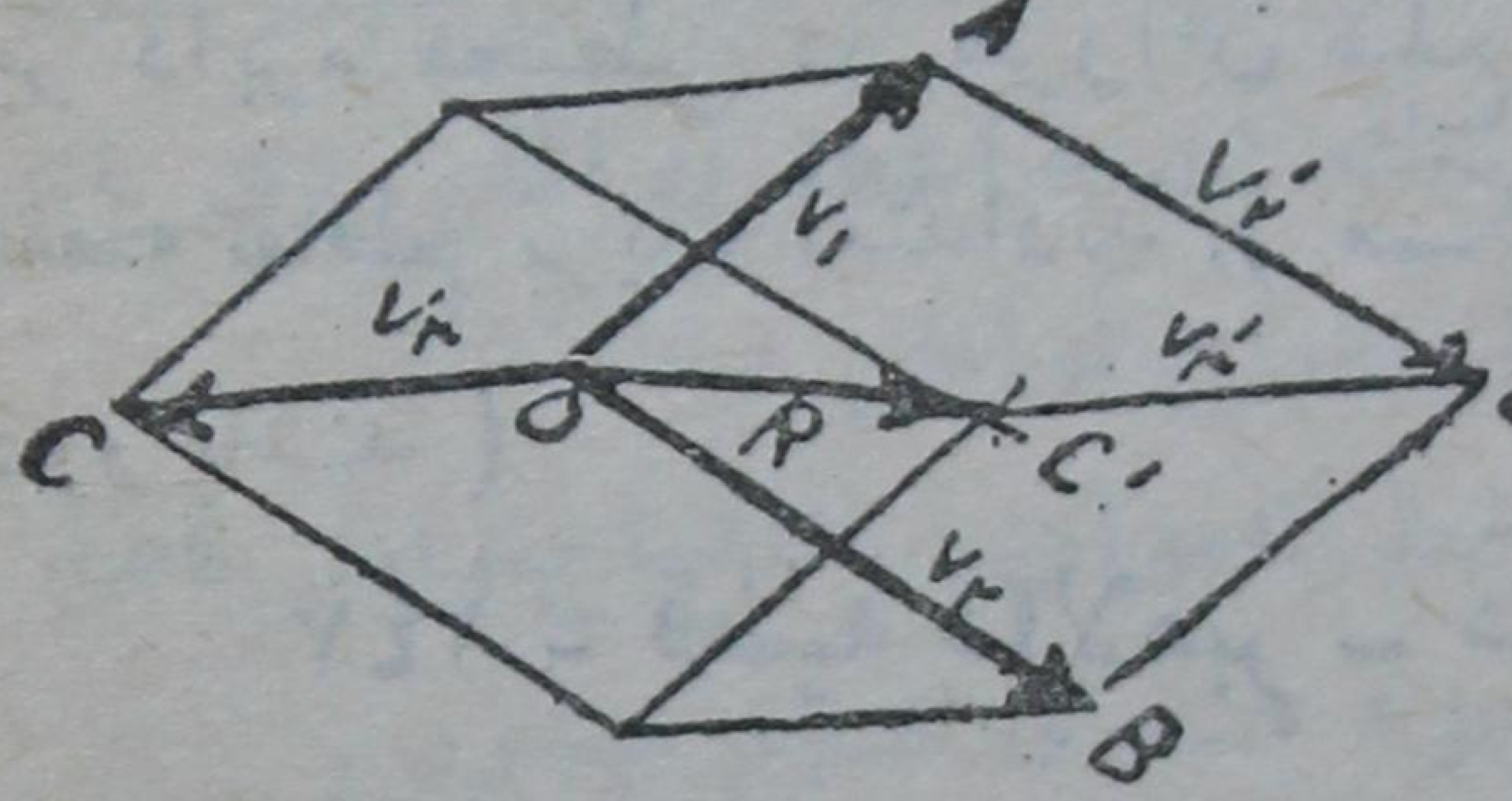
**۱۴۰ - تفاضل هندسی** دو بردار که یك مبداء داشته باشند برداریست که منتهای آندو را بهم ربط دهد .

**۱۴۱ -** برآیند بردار های غیر واقع دریك صفحه نیز مانند بردارهای واقع دریك صفحه بدست میآید .

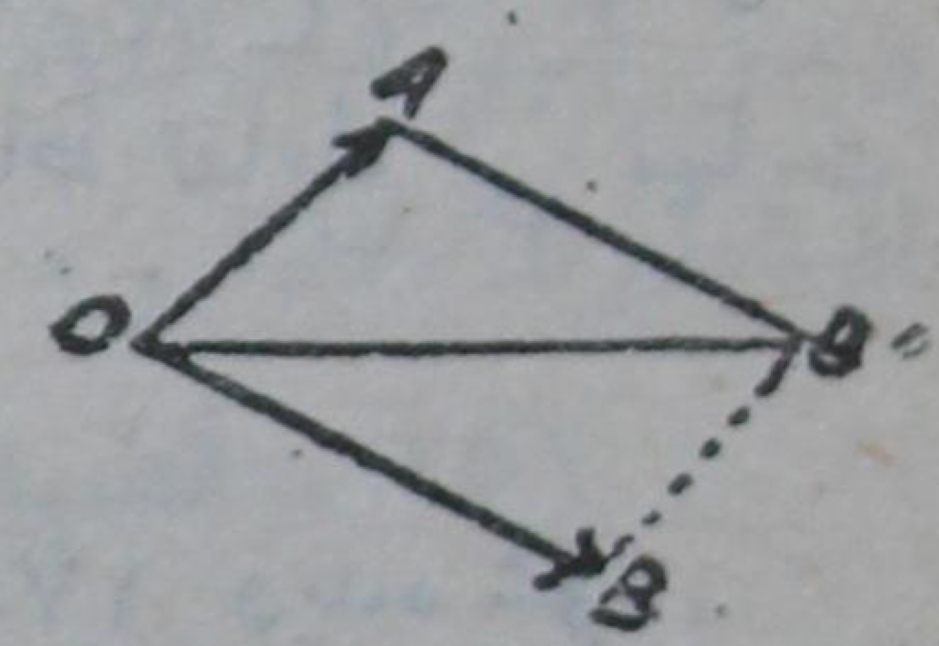
**حالتهای خاص —۱)** برآیندو بردار که یك مبداء

داشته باشند قطر متوازی‌الاضلاعیست که برروی آن‌دوساخته شود. ( ش ۱۲ )

۲ ) برآیند سه بردار غیر واقع در یك صفحه که یك مبداء داشته باشند قطرمتوازی‌السطوحی است که آن بردارها سه یال آن باشند ( ش۱۳ )



ش۱۳



ش۱۲

## تصاویر بردارها

۱۴۲ - **تعریف** - تصویر قائم نقطهٔ $A$ بر یك خط یا یك صفحه موقع عمودی است که از نقطه بر خط یا صفحه فرود آید.

۱۴۳ - **قضیه** - تصویر برآیند چند بردار برآیند تصاویر آن بردارهاست.

# IX موربات

۱۴۴ - **قضیه منلائوس** - رجوع شود بشماره ۶۰

۱۴۵ - **قضیه سوا** - » » ۶۱

۱۴۶ - **قضیه پاسکال** - در هرشش بر محاطی اضلاع مقابل‌دو بدو یکدیگر رادر سه نقطه‌قطع میکنند که بریك استقامتند

**نتیجه ـ ۱)** در پنج بر محاطی چهارضلع دو بدو متنقاً یکدیگر را دردو نقطه قطع میکنند که با نقطه تلاقی ضلع سوم با مماس بر رأس مقابلش بریك استقامتند .۲) درچهار بر محاطی محل تلاقی دوضلع با دو نقطهٔ تلاقی دوضلع دیگر با مماسهای بر رؤس مقابلشان بریك استقامتند . ۳ ) در هرسه بر مماس بر دایره محیطی در هررأس ضلع مقابل‌را قطع میکنند وسه نقطه تقاطع بریك امتدادند .( ممکنست نقاط تقاطع بی نهایت دور باشند )

**۱۴۷ ـ قضیه دالامبر ـ** شماره ۱۷۲ دیده شود.

## x تقسیم توافقی

**۱۴۸ ـ قضیه ـ** درهرروی هرخط فقط دو نقطه $M$ و $M'$ میتوان یافت که قدرمطلق نسبت فواصل آنها از دونقطه ثابت $A$ و $B$ واقع بر آن خط مساوی‌عدد ثابت $k$ باشد .

**نتیجه ـ** بادرنظر گرفتن علامت جبری درروی هرخط فقط یك نقطه میتوان یافت که نسبت فواصل آن از $A$ و $B$ مساوی مقدار ثابت جبری $k$ باشد .

پس
$$\frac{MA}{MB}=-\frac{M'A}{M'B}$$

( $MM'$ قطعه $A$ و $B$ و ) $AB$ قطعه $M'$ و $M$ میگریند را بنسبت توافقی $k$ تقسیم کرده اند .

۱) اگر $O$ وسط $AB$ باشد : $AO^2=OM.OM'$

۲) $$\frac{۱}{AM}+\frac{۱}{AM'}=\frac{۲}{AB}$$

۱۵۰ - **تعریف** - اگرچهار نقطه $A$ و $B$ و $C$ و $D$ خطی را بنسبت توافقی تقسیم کنند وازیك نقطه O بآن چهار نقطه وصل کنیم O-ABCD را یك **دسته اشعه توافقی** وهریك ازخطوط OA و ۰۰۰ را یك شعاع توافقی مینامند.

۱۵۱ - **قضیه** - هرخط که موازی یك شعاع توافقی باشد بوسیله سه شعاع دیگر بدوجزء مساوی تقسیم میشود.

۱۵۲ **قضیه** - هرخط که یك دسته اشعهٔ توافقی راقطع کند بهمین نسبت توافقی تقسیم میشود.

# XI تقارن

## ۱ - تقارن مرکزی

۱۵۳ - ۱) قرینه هرنقطه M نسبت بنقطه O نقطه M' است که با O و M بریك امتداد بوده و OM' = OM باشد. O را مرکزتقارن میگویند. ۲) قرینه هرشکل نسبت بمرکز O شکلی است که هر نقطه‌اش قرینه یك نقطه از شکل اول باشد.

۱۵۴ - **قضیه** - ۱) قرینهٔ مرکزی هرقطعه خط موازی ومساوی ودرجهت مخالف آنست. ۲) قرینه مرکزی هرزاویه مساوی ودرجهت موافق آنست. ۳) قرینه مرکزی هرشکل (چند بر) شکلی (چند بری) مشابه آنست.

۱۵۵ — **مرکز تقارن یك شکل** ـ اگر در شکلی نقطه ای بتوان یافت که قرینهٔ هر نقطهٔ شکل نسبت بآن همچنان بر شکل واقع شود آن نقطه را مرکز تقارن شکل میگویند، مانند مرکز دایره ومحل تلاقی دوقطر متوازی‌الاضلاع،

## ۳ - تقارن محوری

۱۵۶ — **تعریف** ـ ۱) قرینهٔ یك نقطه نسبت بخط △ نقطهٔ 'M است که با M بر روی خطی عمود بر △ بوده و فاصله آن از △ مساوی فاصله M از این خط باشد. △ را **محور تقارن** گویند. ۲) قرینه محوری هر شکل نسبت بمحور △ شکلی است که هر نقطه اش قرینه یك نقطه از شکل اول باشد.

۱۵۷ — **قضیه** ـ ۱) قرینه محوری هر قطعه خط قطعه خطی است مساوی آن که امتدادش محوررا با امتداد آن قطعه خط در یك نقطه قطع میکند. ۲) قرینه محوری هر زاویه زاویه‌ایست مساوی ودرجهت مخالف آن. ۳) قرینه محوری هرشکل شکلی است مساوی آن ولی غیرقابل انطباق برآن.

۱۵۸ — **محور تقارن هر شکل** ( درصورت وجود ) خطیست که قرینه هرنقطه ازشکل نسبت بآن همچنان برشکل واقع شود. مانند قطر دایره وقطر لوزی.

۱۵۹ — **قضیه** ـ اگر شکلی دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد محل تلاقی آن دو محور، مرکز تقارن شکل است.

## XII تشابه

۱۶۰ــ **تعریف** - دوشکل را **مشابه** یا **همانند** گویند وقتی که زوایای متناظرشان متساوی و اضلاع متناظرشان متناسب باشند .

۱۶۱- برای تشابه در مثلث رجوع شود بشماره های ۴۰ تا ۴۳

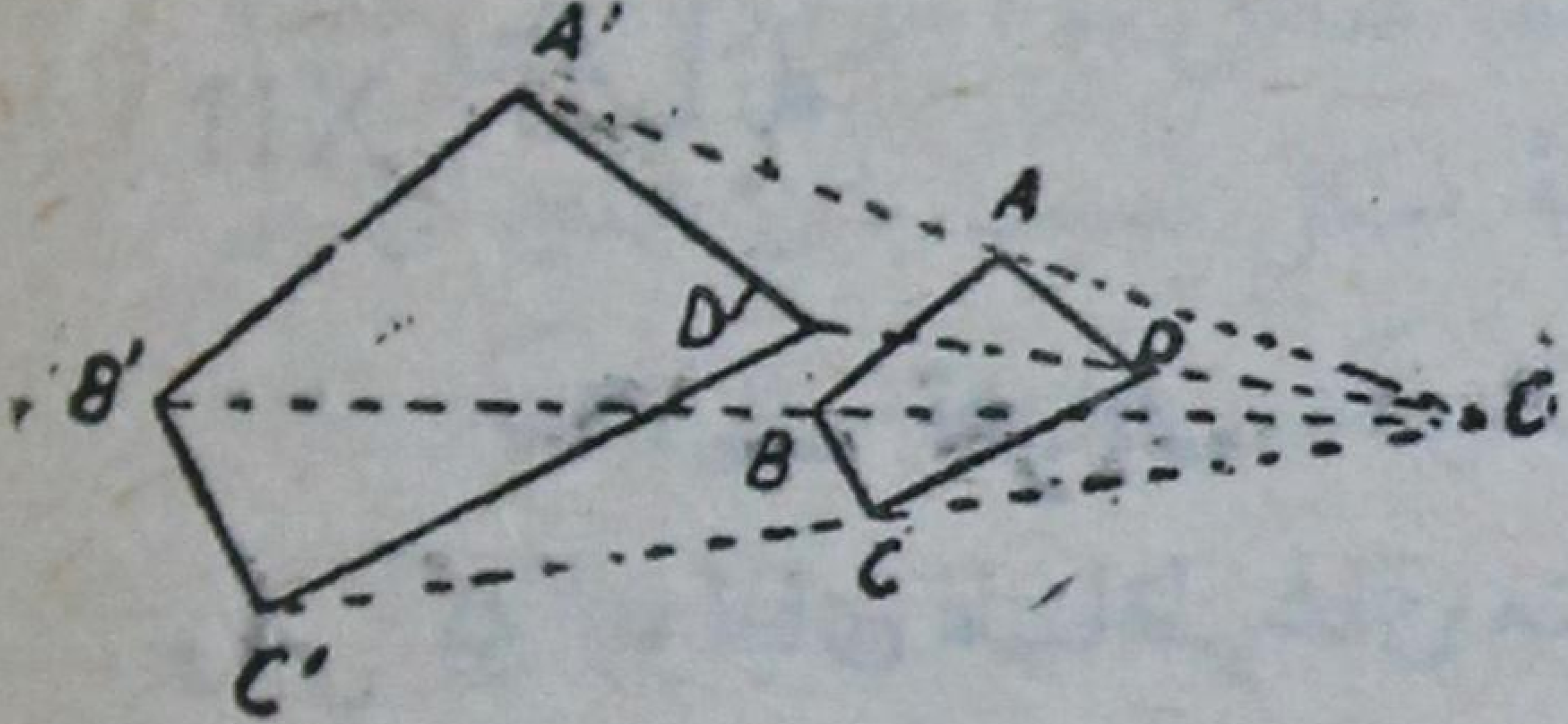
۱۶۲ــ**قضیه** - خطوط موازی برروی دوخط غیر مشخص قطعات متناسب جدا میکنند .

۱۶۳- **قضیه** -دردوشکل مشابه مساحات بر نسبت مربعات دوخط متناظر میباشند .

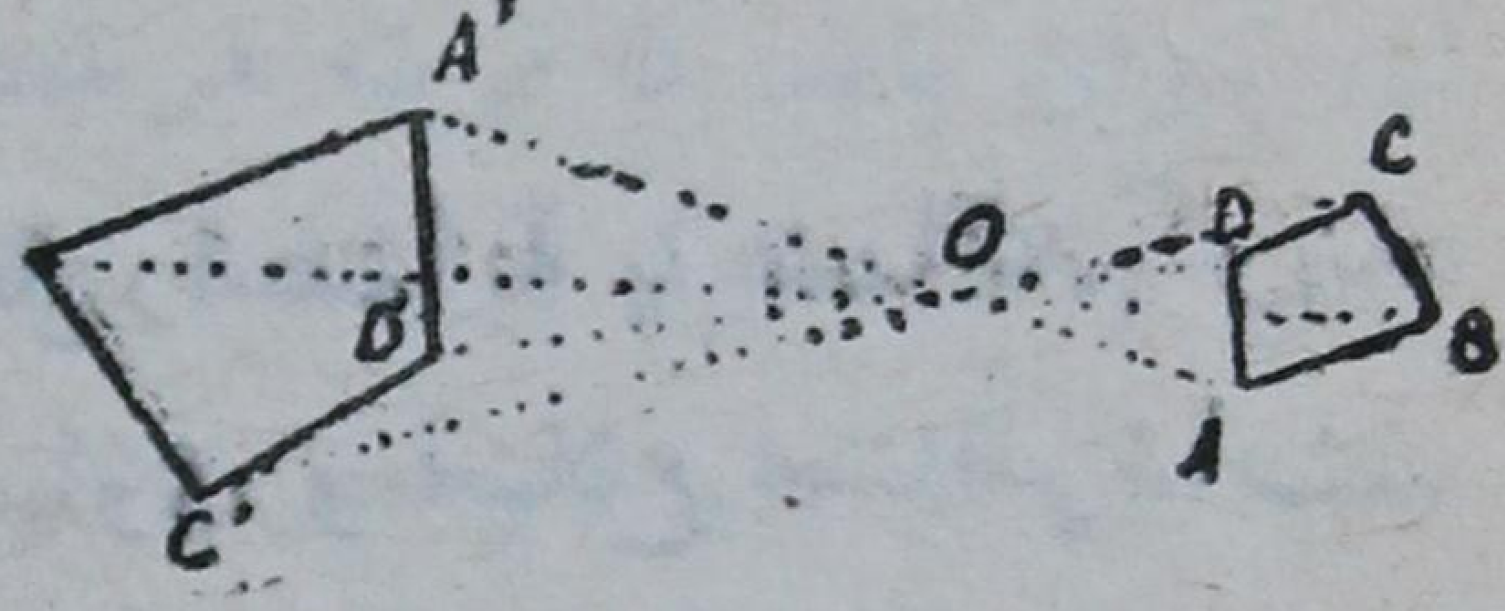
۱۶۴- **قضیه**. همواره دوچندبر مشابه را میتوان بیك عده مثلثهای متشابه ومتشابه‌الوضع تجزیه کرد .

## XIII تجانس

۱۶۵- **تعریف** - دوشکل F و F' را مجانس هم گویند وقتی که هردو نقطهٔ متناظر M و M' آنها با نقطه ثابت O ، موسوم به **مرکز تجانس** ، بر یك امتداد بوده و نسبت $\frac{MO}{M'O}$ مساوی مقدار ثابت k ، موسوم به **نسبت تجانس** ، باشد . اگر F و F' دریك طرف O باشند $k>0$ و **تجانس مستقیم** است ( ش ۱۴ ) واگر دردوطرف O باشند $k<0$ است و **تجانس معکوس** ( ش ۱۵ )




ش ۱۴




ش ۱۵

**۱۶۶ قضیه** ـ شرط لازم و کافی برای آنکه دو شکل مجانس باشند اینست که هردوخط متناظر متوازی بوده نسبتشان مساوی نسبت تجانس باشد.

**۱۶۷- قضیه** ـ مجانس خط مستقیم خطی است مستقیم.

**۱۶۸ -قضیه** ـ مجانس دایره دایره است.

**۱۴۹ -قضیه** ـ دودایره درعین حال مجانس مستقیم و معکوس یکدیگرند.

**۱۷۰ -قضیه** ـ مماسهای بر نقاط متناظر دردو منحنی متجانس با یکدیگر موازیند.

**۱۷۱ -قضیه** ـ دوشکل $F'$ و $F''$ که مجانس شکل سوم $F$ باشند مجانس یکدیگرند و سه مرکز تجانس آنها بررری یك خط مستقیم واقعند.

**۱۷۲- قضیه دالامبر** ـ سه دایره دوبدو دارای شش مرکز تجانسند. ۱) سه مرکز تجانس مستقیم بریك امتدادند. ۲) هرمرکز تجانس مستقیم با دو مرکز تجانس معکوس بر یك استقامتند.

# XIV تغییر مکان در سطح

۱۷۳- **تعریف** - هرگاه برطبق قاعده مشخص ومعینی بازاء هر نقطه M ازشکل F نقطه‌ای مانند 'M درصفحهٔ شکل بدست آوریم شکل 'F حادث ازمجموع نقاط 'M را میگویند از **تغییر مکان** F حاصل شده است و آنرا مبدل یا تبدیل یافته F میگویند .

تغییر مکان ممکنست در اجزاء شکل تغییر دهد ، مانند تجانس ؛ یا در آنها تغییری ندهد، مانند **انتقال** و **دوران**. دراین نوع تغییر مکانها تبدیل یافتهٔ شکل بوسیله یك لغزش درروی صفحه میتواند برشکل اصلی منطبق شود .

۱۷۴- **قضیه** - درتغییر مکانهائی که درآنها شکل تغییر نمیکند وضع جدید دو نقطه برای مشخص کردن وضع جدید شکل کافیست .

## انتقال

۱۷۵ - هرگاه بردار (AB) مفروض باشد و بازاء هر نقطهٔ M از شکل F نقطهٔ 'M را بدست آوریم بطوریکه ('MM) همسنك $(AB)$ باشد گوئیم شکل 'F ، حاصل ازمجموع نقاط 'M ، ازانتقال شکل F باندازهٔ ( $AB$ ) بدست آمده است . بردار $(AB)$ راکه نماینده ومشخص انتقال است **بردار انتقال** گویند .

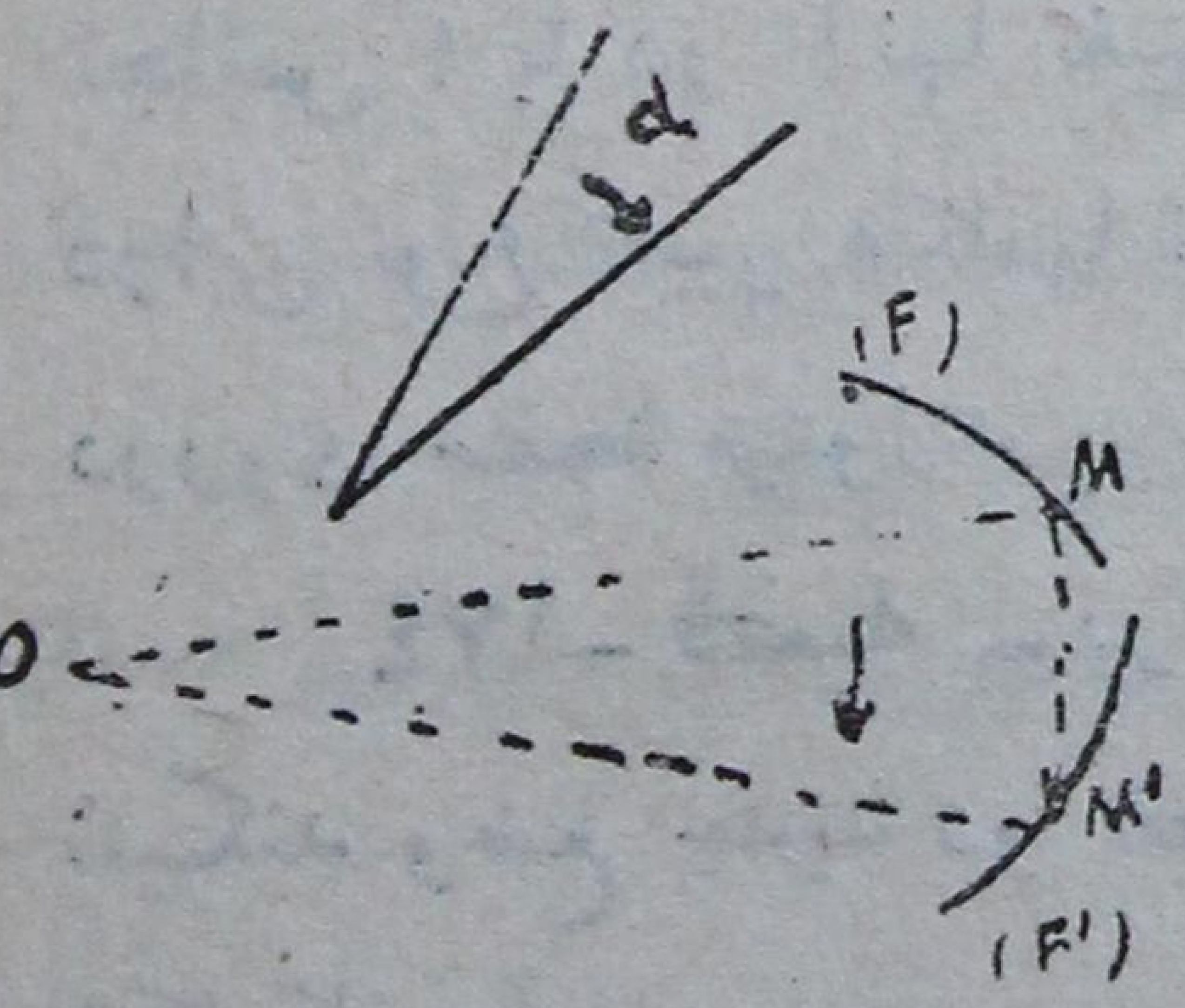
۱۷۶- **قضیه** - انتقال در جزاء شکل تغییر نمیدهد .

۱۷۷- **قضیه**- در انتقال دو بردار متناظر همسنك هستند. بعکس اگر در تغییر مکانی دو بردار متناظر همسنك باشند تغیر مکان انتقال است .

۱۷۸- **قضیه** - تغییر مکان حاصل از چند انتقال ، انتقال است . بردار انتقال اخیر برآیند بردارهای انتقالهای مفروض است .

## دوران

۱۷۹- **تعریف** - هرگاه زاویه $\alpha$ ونقطه O (ش ۱۵) مفروض باشند وبازاء هر نقطهٔ M از شکل F نقطه M' راچنان بدست آوریم که $OM'=OM$ و $M'\hat{O}M=\alpha$ باشد مجموع نقاط M' شکل F' را تشکیل میدهند . میگویند F' ازدوران F باندازهٔ $\alpha$ ودرجهت سهم بدست آمده است .



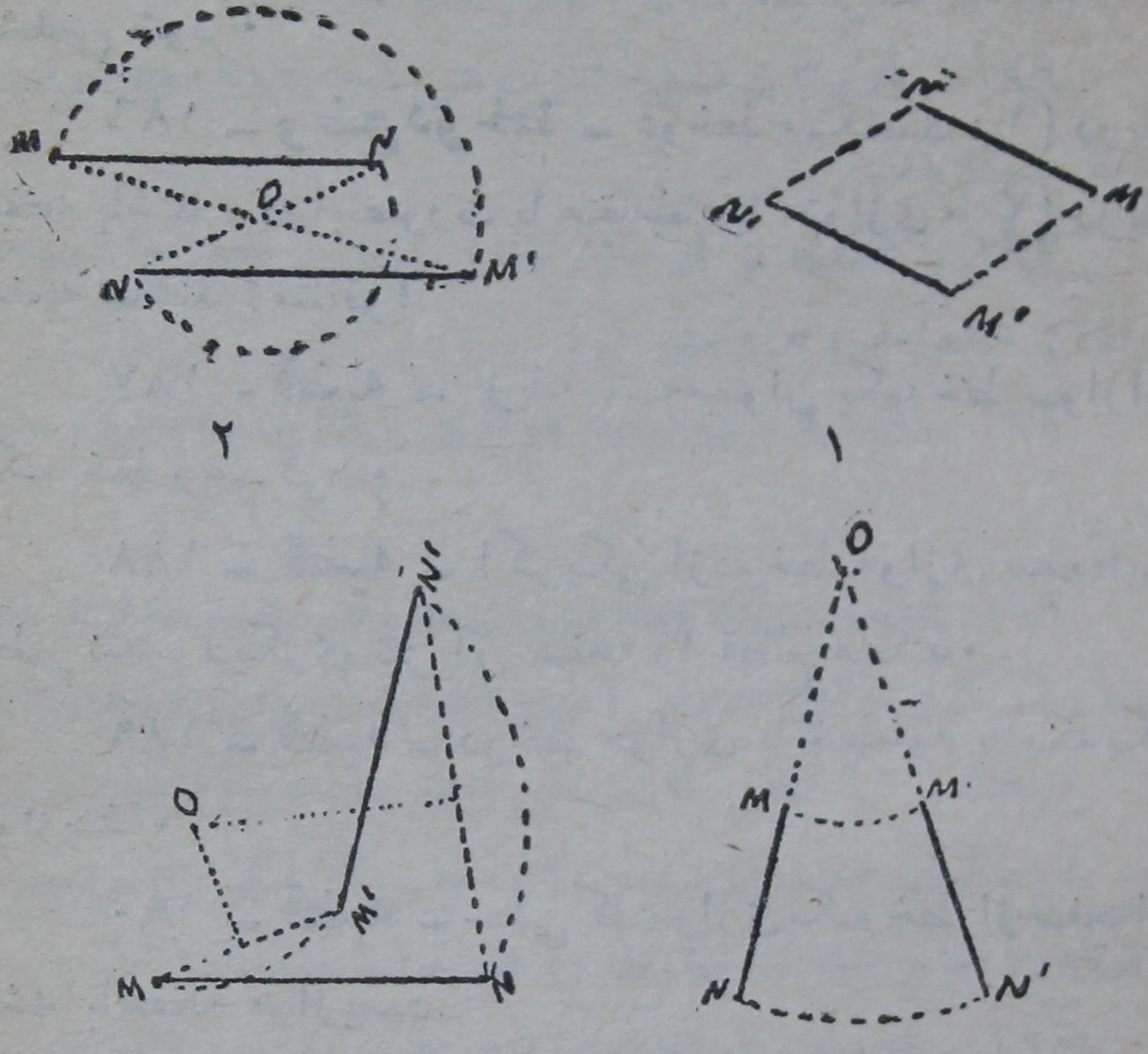
ش ۱۵

۱۸۰ - **قضیه** - دوران اجزاء شکل را تغییر نمیدهد .

۱۸۱ - **قضیه** - هر تغییر مکان در صفحه که در اجزاء شکل تغییر ندهد یك انتقال یا یك دوران خواهد بود . (ش ۱۶، ۱و۲و۳و۴) (در صفحه بعد)

## XV خط و صفحه

۱۸۲ - صفحه نامحدود است و فضا را بدو ناحیه تقسیم




ش ۱۶

میکند. پس خطی که از یك ناحیه بناحیه دیگر برود ناچار صفحه را قطع میکند.

۱۸۳ ـ **وضع خط نسبت بصفحه** ـ خط ممکنست: ۱) درصفحه باشد. ۲) با صفحه موازی باشد. ۳) صفحه را قطع کند.

۱۸٤ ـ **قضیه** ـ بر یك خط و یك نقطه فقط یك صفحه میگذرد.

۱۸۵ ـ **نتیجه** ـ صفحه ممکنست بوسیلهٔ ۱) ۳ نقطه، ۲) یك خط و یك نقطه، ۳) دو خط متقاطع یا متوازی،

مشخص شود .

۱۸۶ ـ **وضع دو خط** ـ دو خط ممکنست : ۱) دریک صفحه باشند ، دراینصورت یا متقاطعند یا متوازی . ۲) دریک صفحه نباشند (متنافر)

۱۸۷ ـ **قضیه** ـ زیک ...ـه میتوان یک خط بموازات یک خط رسم کرد .

۱۸۸ ـ **قضیه** ـ اگر یکی از دو خط موازی صفحه ایرا قطع کند ، دیگری نیز آن صفحه را قطع میکند .

۱۸۹ ـ **قضیه** ـ دو خط موازی با خط سوم با یکدیگر موازیند .

۱۹۰ ـ **قضیه** ـ خطی که موازی یک خط از صفحه ای باشد باصفحه موازیست.

نتیجه ـ ازیک نقطه خطوط بیشمار بموازات یکصفحه رسم میشوند .

۱۹۱ ـ **قضیه** ـ اگر بر خط $\Delta$ که موازی صفحه P است صفحه ای بگذرانیم فصل مشترک دو صفحه موازی $\Delta$ است .

۱۶۲ ـ **قضیه** ـ خطی که موازی دو صفحه باشد بافصل مشترکشان موازیست .

۱۹۳ ـ **قضیه** ـ فصل مشترک دو صفحه که بر دو خط موازی بگذرند باآندوخط موازیست .

۱۹۴ ـ **قضیه** ـ فصل مشترک دوصفحه خطیست مستقیم.

۱۹۵ ـ قضیه ـ هرگاه سه صفحه یکدیگر را دو بدو قطع کنند سه فصل مشترك یا متقاربند یا متوازی.

۱۹۶ ـ قضیه ـ فصل مشترك هر صفحه بادو صفحه متوازی دوخط متوازیند.

۱۹۷ ـ قضیه ـ از یك نقطه میتوان فقط یك صفحه بموازات صفحه مفروض رسم کرد.

۱۹۸ ـ قضیه ـ دوصفحه موازی بایك صفحه بایکدیگر موازیند.

۱۹۹ ـ قضیه ـ از یك نقطه میتوان خطوط بیشمار موازی یك صفحه رسم کرد. مکان هندسی آنها صفحه ایست موازی صفحه اول.

نتیجه ـ ۱) خطی که با یکی ازدو صفحه متوازی موازی باشد با دیگری هم موازیست. ۲) خطی که یکی ازدو صفحه متوازی را قطع کند، دیگری را هم قطع میکند.

۲۰۰ ـ قضیه ـ دوقطعه موازی هم محصور بین دو صفحه متوازی با یکدیگر برابرند.

۲۰۱ ـ قضیه ـ صفحات متوازی برروی خطوط قطعات متناسب جدا میکنند.

۲۰۲ ـ تعریف ـ زاویه بین دو خط متنافر زاویه ایست که بین دوخط متقاطع متوازی باآنها حادث شود.

۲۰۳ ـ قضیه ـ دو زاویه که اضلاعشان موازی باشند متساویند.

۲۰۴ ـ تعریف ـ خطی رابر صفحه‌ای عمود گویند وقتی

که بر همه خطوط آن عمود باشد .

۲۰۵ - **قضیه** - خطی که بردوخط ازصفحه‌ای عمودباشد برصفحه عمودست .

**نتیجه** - ۱) خطی که بریکی ازدوصفحه متوازی عمود باشد بردیگری هم عمودست . ۲) اگریکی ازدوخط‌متوازی برصفحه‌ای عمود باشد دیگری هم عمودست .

۲۰۶ - **قضیه** - ازیك نقطه فقط‌یك صفحه عمود بریك خط میتوان کشید .

نتیجه - ۱) دوصفحه عمود بریك خط متوازیند . ۲) از یك نقطه و درفضا خطوط بیشمارعمود بریك خط میتوان‌رسم کرد ، همه دریك صفحه‌اند .

۲۰۷ - **قضیه** - همه نقاط واقع برصفحه‌ای که بروسط قطعه خطی عمود باشد ازدو انتهای قطعه بیك فاصله‌اند .

۲۰۸ - **قضیه** - ازیك نقطه فقط میتوان یك خط بر صفحه عمود کرد .

**نتیجه** - دوخط عمود بریك صفحه متوازیند.

۲۰۹ - **قضیه سه عمود** - اگر △ برصفحه‌ای عمود باشد و ازموقع آن درصفحه خطی عمود بر یك خط D واقع درصفحه‌رسم کنیم‌وموقع این‌عمود را M بنامیم ، خطوط واصل از M بنقاط مختلف △ همه بر D عمودند . وبعکس ...

۲۱۰ - **قضیه**- اگر از نقطه O یك عمودو چند مایل بر صفحه‌ای رسم کنیم : ۱) مواقع مایلهای متساوی ازموقع عمود

بیك فاصله‌اند . و بعکس .... ۲) از دو مایل نامساوی موقع آنکه بزرگترست از موقع عمود دور ترست . و بعکس ....

۲۱۱ - تعریف ۱) فاصله نقطه از خط طول عمودیست که از آن نقطه بر آنخط فرود آید ۲) فاصله دوخط متنافر طول عمود مشترك آنهاست .

**۲۱۲ - چند مسئله مهم - ۱) رسم عمود مشترك** D و △ - بر △ صفحه‌ای موازی D میگذرانیم، از یك نقطه D خطی بر این صفحه عمود میکنیم ، از موقع عمود D′ را موازی D میکشیم تا △ را در نقطه O قطع کند . از O خطی موازی عمود رسم مینمائیم , این خط عمود مشترك است ۲) باید از O خطی موازی صفحه P رسم کرد تا خط △ را قطع کند - بر O صفحه ای موازی P میکشیم تا △ را در M تلاقی کند . OM جواب مسئله است . ۳) باید خطی موازی D رسم کرد تا △ و △′ را قطع کند — بر △ و △′ دوصفحه موازی D میگذرانیم، فصل مشتر کشان جواب مسئله است . ٤) باید بریك نقطه خطی گذراند که دوخط را قطع کند - بر آن نقطه و هریك ازدوخط صفحه‌ای مرور میدهیم فصل مشتر کشان جواب مسئله است .

## XVI فرجه‌ها

۲۱۳ - فضای محصور بین دوصفحه متقاطع را **فرجه**، هرصفحه را یک **روی** فرجه، فصل مشترك دوصفحه را **یال**،

زاویه حادث مابین فصل مشترکهای دوروی فرجه را باصفحه‌ای عمود بریال **مسطحه** فرجه میگویند. صفحه منصف فرجه ، فرجه های قائم ، تند ، باز ، مجاور ، مجانب ، متمم ، مکمل و جهت فرجه معانی الفاظ مشابه خودرا درروایا دارند .

۲۱٤ - **قضیه** - مسطحه‌های فرجه‌های متساویند.

۲۱۵ — **قضیه** - دوفرجه متساوی برنسبت مسطحه‌های خود هستند .

**نتیجه** — ۱) مقیاس فرجه با مسطحهٔ آن یکی است .

۲۱٦ — **قضیه** - هر صفحه که بریك خط از صفحه‌ای عمود باشد برآن صفحه عمودست .

۲) برای اندازه گرفتن فرجه‌ها واحدهای زوایا بکارمیروند

۲۱۷ - **قضیه** - فصل مشترك دوصفحهٔ عمود بر صفحه سوم براین صفحه عمودست .

**نتیجه**-صفحه‌ای که برفصل مشترك دو صفحه عمود باشد برآنها عمود است .

۲۱۸ - هرگاه اضلاع زاویه‌ای بردوروی فرجه‌ای عمود باشند آن زاویه مکمل فرجه است .

**تصویر بر صفحه**

۲۱۹ - تصویر نقطه موقع عمودیست که‌از نقطه برصفحه فرود آید .

تصویر یك شکل شکل حادث از مجموع تصاویر نقاط مختلف آنست .

۲۲۰ - **قضیه** - تصویر خط مستقیم خطیست مستقیم.

۲۲۱ - **قضیه** - تصاویرخطوط متوازی متوازیند .

۲۲۲ - **قضیه** - ۱ ) اگر یك ضلع زاویه قائمه ای با صفحهٔ تصویر موازی باشد تصویر آن هم قائمه است - ۲) اگر تصویر زاویه‌ای که یك ضلعش با صفحه تصویر موازیست قائمه باشد اقلا یك ضلع آن باصفحه تصویر موازیست.

۲۲۳ - **میل خط** نسبت بیك صفحه زاویه بین خط و تصویرش بر آن صفحه است. **شیب** خط ظل ( تانژانت ) میل آن میباشد.

۲۲۴ - **قضیه** - میل خط کوچکترین زاویه بین آنخط و خطوط صفحه است.

۲۲۵ - **قضیه** - مسطحهٔ یك فرجه بزرگترین زاویه ایست که اضلاعش بترتیب در دوروی فرجه واقعند.

**تعریف** - خطی را که در یك روی فرجه عمود بریال رسم شود **خط بزرگترین شیب** آنصفحه نسبت بروی دیگر فرجه گویند.

۲۲۶ - **قضیه** - ۱ ) طول تصویر خط مساویست با طول خود آن ضرب درجیب تمام میلش. ۲ ) مساحت تصویر یك شکل مسطح مساویست با حاصل ضرب مساحت آن شکل در جیب تمام زاویه حادث بین صفحهٔ شکل و صفحهٔ تصویر.

# XVII تقارن درفضا

۲۲۷ - **تقارن نسبت بیك نقطه** - **M′** را قرینهٔ **M** نسبت بمرکز تقارن **O** گویند وقتی که **O** وسط **MM′** باشد.

۲۲۸ - **تقارن نسبت بیك خط** - **M′** را قرینه **M**

نسبت بمحور تقارن △ گویند وقتی که △ درصفحه‌ای عمود بروسط $MM'$ باشد.

رجوع شود به تقارن درصفحه (شماره های ۱۵۳ تا ۱۵۹)

۲۲۹ – تقارن نسبت بیك صفحه - $M'$ را قرینه $M$ نسبت بصفحه $P$ گویند وقتی که $P$ بروسط $MM'$ عمود باشد.

۲۳۰ – دو شکل نسبت بیك مرکز، یك محور یا یك صفحه قرینه یکدیگرند وقتی که جمیع نقاط یکی قرینه نقاط دیگری باشد. اگر درشکلی نقطه ای، خطی یاصفحه ای بتوان یافت که قرینهٔ هر نقطه شکل نسبت بآن نقطه، خط یا صفحه همچنان بر خود شکل واقع گردد آنهارا **مرکز** یا **محور** یا **سطح تقارن** شکل گویند.

۲۳۱ — هرگاه اجزاء شکلی را بتوان بر اجزاء شکل دیگری که مساوی آنست منطبق نمود دو شکل مساوی و**قابل انطباق** هستند والا مساویند اما **انطباق ناپذیر**.

۲۳۲ — **قضیه - ۱**) دوقرینه یك شکل نسبت به یك صفحه ویك نقطه از آن صفحه قابل انطباقند — ۲) دو قرینهٔ یك شکل نسبت بدومرکز قابل انطباقند - ۳) قرینه های یك شکل نسبت بیك صفحه و یك مرکز قابل انطباقند - ٤) همچنین قرینه های یك شکل نسبت بدو صفحه - ٥ قرینهٔ مرکزی یك جسم ممکنست بر آن قابل انطباق باشد یا نباشد - ٦) قرینه های یك جسم نسبت بیك محور یا یك صفحه بر خود جسم قابل انطباق نیستند.

۲۳۳ - **قضیه - ۱)** قرینه هر شکل مستوی نسبت بیك مرکز ، یك محور یا یك صفحه با خود آن شکل مساویست -۲) قرینه یك صفحه ، صفحه است ۳ ) قرینه هرفرجه نسبت بیك صفحه فرجه‌ایست مساوی با آن اما درجهت مخالف .

۲۳۴ - **قضیه - ۱ )** اگر شکلی دوصفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یك محور تقارن ( فصل‌مشترك دوصفحه) است - ۲ ) اگر شکلی سه صفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یك مرکز تقارن ( نقطهٔ‌مشترك سه صفحه) نیز هست .

## XVIII - تجانس درفضا

۲۳۵ - **تعریف** - هرگاه نقطه $O$ بنام **مرکز تجانس** و عدد $\lambda$ بنام **نسبت تجانس** داده شده باشند **مجانس** هر شکل $F$ نسبت به $O$ شکل $F'$ است بطوریکه‌هردو نقطه متناظر $M$ و $M'$ ازآنها با $O$ بریك امتداد باشندو $\lambda=\frac{OM'}{OM}$ باشد.

هرگاه $M$ و $M'$ در یك طرف $O$ باشند ( $\lambda$ مثبت باشد ) $F'$ مجانس مستقیم $F$ واگر $M$ و $M'$ در دوطرف $O$ باشند( $\lambda$ منفی باشد ) مجانس معکوس آن میباشد .

۲۳۶ - **قضیه - ۱ )** مجانس یك قطعه خط خطی موازی آنست که اگر مجانس مستقیم باشد با آن در یك جهت است و اگر معکوس باشد درجهت مخالف .

۲ ) زاویهٔ بین دو خط مساوی زاویهٔ بین مجانسهای آنهاست .

۳ ) مجانس خطی که بر مرکز بگذرد بر خود آن خط منطبق است .

٤ ) مجانس صفحهٔ مستوی صفحه مستویست .

۲۳۷ - **قضیه - ۱ )** مساحات دو شکل مجانس بر نسبت مربع دویال متناظر آنهاست .

۲ ) حجمهای دو شکل مجانس بر نسبت مکعب دویال متناظر آنهاست .

۲۳۸- **قضیه** - هرگاه شکل F مرکز تقارن داشته باشد مجانس آن $F'$ نیز مرکز تقارنی خواهد داشت . دراینصورت F و$F'$ در عین حال مجانس مستقیم ومجانس معکوس یکدیگرند واگر مراکز تقارن آنها را C و $C'$ و مراکز تجانس مستقیم و معکوسشان O و $O'$ و نسبت تجانس را λ بنامیم :

$$\frac{OC'}{OC}=\frac{O'C'}{O'C}=\lambda$$

۲۳۹ - **قضیه** - اگر $F'$ و$F''$ مجانسهای F بانسبتهای λ و$\lambda'$ باشند مجانسهای یکدیگر بانسبت $\frac{\lambda}{\lambda'}$ نیز هستند .

۲٤۰ - **قضیه -۱ )** اگر سه شکل دو بدو متجانس باشند سه مرکز تجانس بر یك خط بنام محور تجانس واقعند .

۲ ) اگر چهار شکل دو بدو متجانس باشند شش مرکز تجانس در یك صفحه ، بنام صفحهٔ تجانس ، واقعند. چون هر سه شکل از این چهار شکل یك محور تجانس دارند چهار شکل چهار محور تجانس خواهند داشت که اضلاع یك چهار بر کامل‌اند و رؤس چهار بر کامل شش مرکز تجانس چهار شکل میباشند .

**تبصره** - اگر چهار شکل که مرکز تقارن دارند دو بدو مجانس یکدیگر باشند هر دسته سه تائی آنها چهار محور تجانس (یك محور تجانس مستقیم و سه محور تجانس معکوس) دارند؛ پس دستگاه چهار شکل شانزده محور تجانس دارند که چهار بچهار در هشت صفحهٔ مشخص واقع میباشند.

## XIX - تشابه در فضا

۲۴۱ - جسمی را مشابه جسم دیگر گویند که با مجانس مستقیم آن مساوی باشد. نسبت دو یال متناظر را نسبت تشابه مینامند.

۲۴۲ - **قضیه** - در دو جسم متشابه: ۱) فرجه های متناظر با هم برابرند؛ ۲) یالهای متناظر بر یك نسبتند؛ ۳) وجوه متناظر چندبر های متشابهند.

۲۴۳ **قضیه** - دو چند روی متشابه را میتوان همواره بچند چهار وجهی متشابه و متشابه‌الوضع تجزیه نمود.

۲۴۴ - **قضیه** - نسبت مساحات دو جسم مشابه مساوی نسبت مربع اضلاع متناظر و نسبت حجمهایشان مساوی نسبت مکعب اضلاع متناظرشان میباشد.

## XX - تغییر مکان در فضا

رجوع شود بشماره های ۱۷۳ تا ۱۸۱

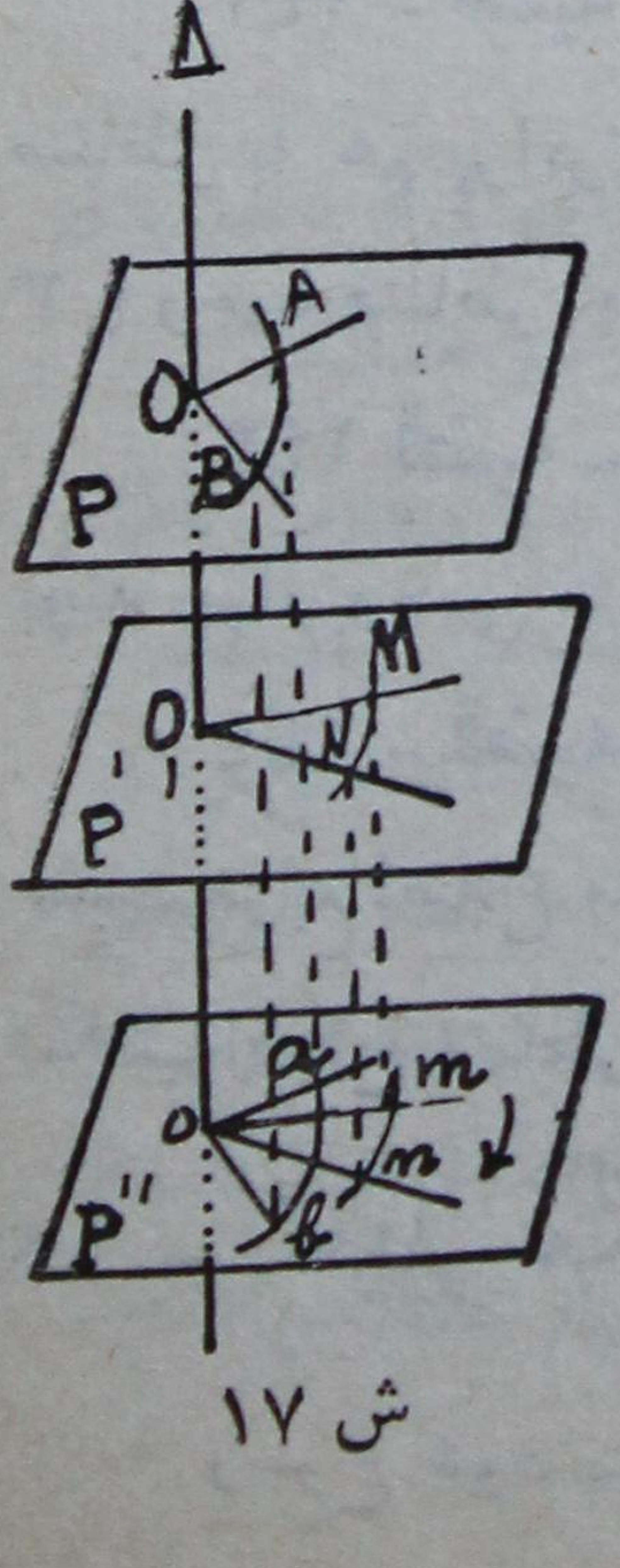
## ۱ - انتقال

۲۴۵ - **قضیه** - اگر در تغییر مکان در فضا سه نقطه غیر واقع بر یك امتداد جسمی بر روی سه خط موازی و مساوی و یکجهت تغییر مکان دهند جسم حرکت انتقالی کرده است و بردار انتقال مساوی و در جهت تغییر مکان یکی از آن سه نقطه است.

**نتیجه** - انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد.

۲۴۶ - چند انتقال را در فضا میتوان بیك انتقال تبدیل کرد. بردار این انتقال مساوی برآیند بردار های انتقالهای جزء میباشد.

## ۲ - دوران



ش ۱۷

۲۴۷ - **تعریف** - اگر سه صفحه موازی p و p' و p'' (ش ۱۷) فرض نمائیم: ۱) دو زاویه AOB و $MO_1N$ که در دو صفحه p و P' واقعند و رؤسشان بر روی خط $OO_1$ عمود بر صفحات قرار دارند، در یك جهت هستند اگر تصاویر شان بر روی صفحه p'' در یك جهت باشند - ۲) و نیز دو قوس واقع در صفحات p و p' که مرکز شان در روی خطی عمود بر صفحات باشد در

یك جهتند وقتی تصاویرشان برروی P'' دریك جهت باشند.

۲۴۸ - **قضیه** - هرگاه شکلی حول محوری دوران کند تصاویر تمام نقاط آن برروی صفحه عمود برمحور دریك جهت و بزوایای متساوی دوران مینمایند.

۲۴۹ - **قضیه** - هرگاه شکلی در فضا تغییر مکان دهد بطوریکه سه نقطه غیرواقع بریك امتدادآن برروی سه‌صفحه متوازی سه‌قوس متساوی ودر یك جهت بپیمایند ومراکز سه قوس درروی خطی عمودبراین صفحات واقع باشند شکل در فضادوران کرده استوخطی که برمراکز قوسهامیگذردمحور دوران است.

## ۳ - حرکت مارپیچی

۲۵۰ - **قضیه** - هرتغییر مکان هرشکلی که بروی کره رسم شده باشد ممکنست تبدیل بدوران در حول یکی از قطر های کره شود.

۲۵۱ - **قضیه** - هرتغییر مکان‌درفضا که دراجزاء شکل تغییر ندهد منجر بیك انتقال ویك دوران میشود.

۲۵۲ - **تعریف** - هرتغییر مکان را که‌منجر بیك‌دوران ویك‌انتقال بموازات‌محوردوران‌شود **حرکت‌مارپیچی** مینامند.

# XXI چندروها ، منشور ، هرم

۲۵۳ - **تعریف** - چند رو یا کثیرالوجوه جسمی است که ازهرطرف بسطوح مستوی محدود شده باشد. قسمتی از

هرصفحه محدود بحدود جسم را یك **رو یافرجه** ،فصل مشترك دو زو را **یال** ، فصل مشترك دویال را **راس** ، فرجه بین هر دورو را یك **فرجه** جسم میگویند. چند روی **گوژ** آنست که مقطع هرصفحه درآن چند بر گوژباشد. چندروی منتظم آنست که همه روهایش باهم وهمه فرجه‌هایش باهم مساوی باشند. چندروهای منظم را **اجسام افلاطونی** میگویند.

۲۵۴ - **قضیه اولر** - اگر s عده روس ، a عدهٔ یالها و f عدهٔ روهای یك چند روی گوژ باشند $f + s = a + ۲$

۲۵۵ - **قضیه** - اجسام افلاطونی منحصر به پنج هستند: چهارروی منتظم (٤ راس و ٦ یال) ، هشت رو (٦ راس و ۱۲ یال) ، بیست رو (۱۲ راس و ۳۰ یال) [ دراین سه جسم هر رو سه بر است ] ؛ مکعب که هرروی آن مربعست و ۸ راس و ۱۲ یال دارد ؛ دوازده رو که هرروی آن پنج برست و ۲۰ راس و ۳۰ یال دارد .

۲۵٦ - **تعریف** - **سطح منشوری** آنست که از تغییر مکان خطی بنام مولد که همواره بموازات خود تغییرمکان دهد و بریك چندبر متکی باشدپدید آید . **منشور** قسمتی ازفضا محصور بین یك سطح منشور ودو صفحه مستوی است ، اگر صفحه‌ها موازی نباشند منشور **ناقص** ، اگر صفحه ها برمولد عمود باشندمنشور **قائم** است . مقطع هر صفحه عمود برمولدمنشور را **مقطع قائم** گویند .

**سطح هرم** سطحی است که از تغییر مکان خطی بنام **مولد** که همواره برنقطه ثابتی بگذرد و بر محیط چند بری

متکی باشد پدید آید. قسمتی ازفضا محصوربین چنین سطحی بایك صفحه مستوی راهرم میگویند. درهرم منتظم همه‌روها سه‌برهای متساوی‌الساقین متساویند.

هرم‌ناقص ازقطع کردن یك‌هرم بایك صفحه پدیدمیآید. درهرم منتظم ارتفاع‌هرسه‌برجانبی ودرهرم ناقص منظم‌ارتفاع هر ذوزنقه جانبی را **سهم** میگویند.

۲۵۷ - **قضیه** - فصل مشترك‌صفحات متوازی باسطح منشوری چند برهای متساویند.

۲۵۸- **قضیه** - سطح بدن‌منشورمساویست بحاصلضرب محیط مقطع قائم در یال.

۲۵۹ -**قضیه** -هرگاه‌سه‌روی یکی‌از کنجهای‌منشوری باسه روی‌یکی از کنجهای منشور دیگرمتساوی ومتشابه‌الوضع باشند دوجسم متساویند.

۲۶۰ - **قضیه**- ۱)درمتوازی السطوح:روهای مقابل موازی و مساوی یکدیگرند. ۲) چهار قطر یکدیگر را در یك نقطه قطع میکنند. ۳) این نقطه مرکز تقارن جسم است.

۲۶۱ - **قضیه** - هر منشور مایل معادل منشور قائمی است که قاعده اش مقطع قائم و ارتفاعش یال آن باشد.

۲۶۲ -**قضیه** - ۱) حجم‌دومکعب مستطیل که یك یال مشترك داشته باشند بر نسبت حاصلضرب دو یال دیگراست.
۲) حجم‌دومکعب مستطیل که دو یال مشترك داشته باشندبر نسبت یال سوم است.

۲۶۳ - **قضیه** - ۱) حجم مکعب مستطیل مساویست به حاصلضرب سه‌یال آن؛ ۲) حجم متوازی‌السطوح مساویست به حاصلضرب قاعده در ارتفاع؛ ۳) بطور کلی حجم منشور مساویست بحاصلضرب مقطع قائم در یال (قاعده درارتفاع).

۲۶۴ - **قضیه** - درهرم‌منتظم همه روها باهم برابرند.

۲۶۵ - **قضیه** - هرگاه صفحه‌ای هرم راموازی قاعده قطع کند: ۱) یالها وارتفاع هرم همه بیك نسبت قطع میشوند؛ ۲) مقطع مشابه‌قاعده‌است؛ ۳) نسبت سطح مقطع بسطح قاعده مساوی نسبت مربع دوضلع متناظرست.

۲۶۶ - **قضیه** - دوهرم که‌قاعده‌هایشان‌معادل‌وارتفاعشان مساوی باشد معادل یکدیگرند.

۲۶۷ - **قضیه** - هرم سه پهلو $\frac{1}{3}$ منشورسه پهلوئی‌است که بهمان قاعده وارتفاع باشد.

**نتیجه** - حجم هرم مساویست بحاصلضرب قاعده در $\frac{1}{3}$ ارتفاع

۲۶۸ - **قضیه** - حجم هرم ناقصی بقاعده های B و b و ارتفاع h مساوی $\frac{h}{3}(B+b+\sqrt{Bb})$ است.

۲۶۹ - **قضیه**- حجم منشور ناقص سه پهلو مساویست بحاصلضرب قاعده در $\frac{1}{3}$ مجموع سه‌یال.

۲۷۰ -**قضیه** - حجم منشور ناقص قائمی که‌قاعدهٔ آن‌چندبر منتظم ۲n ضلعی باشدمساویست بحاصلضرب قاعده‌درطول‌محور، یعنی خطی که مرکز های دو قاعده را بهم مربوط میکند.

۲۷۱ - **تعریف- شبه منشور** جسمی است که دو قاعده آن دوچندبر متوازی وهر یك ازوجوه جانبی آن سه بر یـا ذوزنقه باشد مقطع صفحه ایرا که بیك فاصله از دوقاعده باشد **مقطع متوسط** گویند.

۲۷۲ - **قضیه** - حجم شبه منشور مساوی است بحاصلضرب $\frac{1}{6}$ ارتفاع آن دردو قاعده بعلاوه چهار برابر مقطع متوسط

$$v = \frac{h}{6}(B + b + 4m)$$

## XXII استوانه ، مخروط ، کره

۲۷۳-**تعریف- سطح دوار** ازدوران یك خط (راست یاخم) تغییر ناپذیر درحول مستقیمی بنام محور پدیدمیآید. **جسم دوار** بیك سطح دوار محدودست. **مدار** دایره ایست از سطح دوار که صفحه اش برمحور عمود ومرکزش برمحور منطبق باشد. **نصف النهار** مقطع سطح دواراست با هر صفحه که بر محور بگذرد. **مماس** برسطح دوارخطیست که بریك منحنی مرسوم برروی سطح دوارمماس باشد. **صفحه مماس** برهر نقطه از سطح دوارمکان هندسی مماسهائیست که از آن نقطه برخطوط مختلف مرسوم درسطح دوار رسم شوند. **قائم** برسطح دوار درهر نقطه برصفحهٔ مماس عمود است.

**سطح استوانی** ازحرکت مولد بموازات خود ومتکی بریك منحنی **هادی** بوجود میآید. **سطح مخروطی** ازتغییر مکان خطی که همواره برنقطه ثابتی گذشته برمنحنی هادی متکی باشد پدید میگردد.

**سطح کروی** آنست که جمیع نقاطش از نقطه‌ای بنام **مرکز** بفاصله R باشند. **کره** جسمیست محدود بسطح کروی . **دایره بزرگ** مقطع کره است باصفحه‌ای که برمرکز آن بگذرد • مقطع صفحات دیگر **دایره کوچك** میباشد • **فاصله کروی** دونقطهٔ واقع برروی کره قوسی است ازدایره بزرگی که بر آن دو نقطه بگذرد . **منطقه** قسمتی از سطح کره است محصور بین دوصفحه موازی ، فاصله این دو صفحه ارتفاع منطقه است • **عراقیه** یا **عرقچین** منطقه ایست که‌یك صفحهٔ آن بر کره مماس باشد . **قطعه کروی** قسمتی ازکره محصور بین‌دوصفحه‌موازیست. **قاچ** قسمتی‌ازسطح کره‌محصور بین دونیمدایرهٔ بزرك است ؛ **زاویه‌قاچ** عبارتست اززاویه بین دومماس که ازنقطه برخورد دو نیمدایره بر آنها رسم شود ؛ **قوس‌قاچ** قوسی ازدایره بزرگیست که برفصل‌مشترك دونیمدایره قاچ عمود وبآنها محدود باشد **اکلیل کروی** قسمتی از حجم کره محصور بین دو نیمدایره بزرك است • **قطاع کروی** جسمیست که از دوران یك قطاع دایره حول قطری از دایره پدید آید • **حلقه کروی** جسمیست که از دوران یك قطعه دایره حول قطری از کره تولید شود•

۲۷۴- **قضیه** - همه نصف النهارهای یك سطح‌دوار با هم مساویند •

۲۷۵ - **قضیه** - ۱) مماسهای بریك نقطه ازسطح دوار همه دریك صفحه اند بنام صفحه مماس ۲) قائم برهر نقطه از سطح دوار بامحور موازیست یا آنراقطع میکند.

## ۲۷۶ - استوانه

۱- دوقاعده استوانه باهم مساویند .

۲- صفحه مماس بر استوانه بر یکی از مولد های آن میگذرد .

۳- استوانه حد منشور محیطی یامحاطی خودمیباشد.

٤- سطح بدن استوانه قائم مساویست با حاصلضرب محیطقاعده درارتفاع .

٥- جسم استوانه قائم مساویست با حاصلضرب قاعده در ارتفاع .

٦- سطح بدن(حجم)استوانه مایل مساویست بحاصلضرب محیط (سطح) مقطع قائم آن در مولد.

۷- دراستوانه ناقص مستدیر قائم سطح بدن ( حجم ) مساویست بحاصلضرب محیطقاعده (سطح قاعده) درمحورجسم [ یعنی خطی که از مرکز قاعده موازی مولد رسم شود ] .

۸- مقطع استوانه مستدیر باهر صفحه که موازی قاعده باشد دایره وبا هرصفحه دیگر بیضی است ،

## ۲۷۷ - مخروط

۱- مقطع مخروطمستدیر باهرصفحه که باقاعده موازی باشد دایره ، با هر صفحه که موزای قاعده یا یك مولد نباشد بیضی ، باهر صفحه که موازی یك مولد باشد سهمی وبا هر صفحه که مخروط و امتداد آنرا در آنطرف رأس قطع کند هذلولی میباشد (رجوع شود بمخروطات).

۲- صفحه مماس برمخروط بریك مولد آن میگذرد .

۳- مخروط حدهرم محیطی ومحاطی خود میباشد .

٤ - سطح بدن مخروط مساویست بحاصلضرب محیط قاعده درنصف سهم .

٥- حجم مخروط مساویست بحاصلضرب سطح قاعده‌در ثلث ارتفاع .

٦- مخروط ناقص حد هرم ناقص محیطی ومحاطی‌خود میباشد .

۷- اگر شعاعهای دو قاعده مخروط ناقص را $R$ و $r$ ، سهم آنرا $l$ وارتفاعش را $h$ فرض کنیم :

$$\text{حجم} = \pi\frac{h}{3}(R^2+r^2+Rr)$$

$$\text{سطح بدن} = \pi l(R+r) \qquad \text{سطح کل} = \pi[R^2+l(R+r)]$$

### ۲۷۸ - کره

۱ - مقطع هرصفحه در کره دایره ایست که مرکزش موقع عمودیست که ازمرکز کره برصفحه قاطع فرود آید . اگر شعاع کره $R$ ،شعاع دایره مقطع $r$ وفاصله این‌صفحه‌از مرکز کره $d$ فرض شوند:

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

۲- هرخط کره رافقط دردو نقطه قطع میکند .

۳- قطر عمود برسطح هردایرهٔ کره، جسم‌رادردو نقطه $p$ و $p$ قطع میکند که دوقطب دایره‌نام دارند .جمیع نقاطهر دایره ازهر یك ازدو قطب بیك فاصله‌اند .

٤- دریك کره‌دایره‌های متساوی از مرکز بیك‌فاصله‌اند وبعکس .

۵- دریك کره ازدایره‌های نامساوی آنکه بزرگترست بمرکز نزدیکترست وبعکس.

۶- صفحه مماس برکره با آن فقط یك نقطه مشترك دارد وبر شعاع نقطهٔ تماس عمودست.

۷- بریك چهارروی منتظم میتوان یك کره محیط ودر آن یك کره محاط کرد. اگریال آنرا a بنامیم:

$$\text{شعاع کره محیطی} = \frac{a\sqrt{۶}}{۴} ؛ \text{شعاع کره محاطی} = \frac{a\sqrt{۶}}{۱۲} .$$

۸- کوتاه ترین راه بین دونقطه واقع برروی کره‌قوسی است ازدایره بزرگ.

۹- **برای تعیین شعاع کره** باین راه عمل میکنیم: دونقطه M و N ازسطح کره‌را مرکز قرار داده با فاصله‌های قطبی اختیاری قوسهائی (دوبدو باشعاعهای متساوی) رسم میکنیم تا از برخورد آنها سه نقطه A و B و C (که واقعند برمحیط یك‌دایره‌بزرك) بدست آیند. باپرکار گروی طولهای AB و AC و BC را برروی صفحه کاغذ نقل میکنیم وبااین سه‌طول‌مثلثی میسازیم. دایرهٔ محیطی این‌مثلث مساوی‌دایرهٔ بزرك از کرهٔ مفروض وشعاعش مساوی شعاع کره است.

۱۰- مساحت‌سطح‌حادث ازدوران‌قطعه‌خط‌راستی‌درحول محوری که با آن در یك صفحه باشد مساویست بحاصلضرب تصویر قطعه خط برمحوردر محیط‌دایره‌ای که‌شعاع آن‌عمودی باشد که‌بر وسط قطعه خط اخراج وبمحور محدود گردد.

۱۱- حجم حادث از دوران مثلثی حول محوری که در

صفحه آنست و بریك رأس آن میگذرد و ضلع مقابل بآن راس را قطع نمیکند مساویست بحاصلضرب سطح حادث ازدوران ضلع مقابل در $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع وارد براین ضلع .

۱۲- سطح کره مساویست به $4\pi R^{2}$

۱۳- حجم » » » $\frac{\pi}{6} d^{3} = \frac{4}{3} \pi R^{3}$

۱٤- اگر دوصفحه موازی بفاصله h کره‌ای بشعاع R را قطع ودر آن دو دایره بشعاعهای r و r' ایجاد کند :

سطح منطقه حادث $= 2\pi Rh$

حجم قطعه کروی حادث $= \frac{\pi}{6} h^{3} + \frac{\pi}{2} (r^{2} + r'^{2}) h$

حجم قطاع کروی $= 2\pi Rh \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3} \pi R^{2} h$

۱۵ — اندازه زاویه قاچ قوس مقابل قاچ است.

۱٦ — اگر قوس قاچ را α فرض کنیم در کره ای بشعاع R :

سطح قاچ $= 4\pi R^{2} \frac{\alpha}{360} = \pi R^{2} \frac{\alpha}{90}$

حجم اکلیل $= \frac{4}{3} \pi R^{3} \frac{\alpha}{360} = \pi R^{3} \frac{\alpha}{270}$

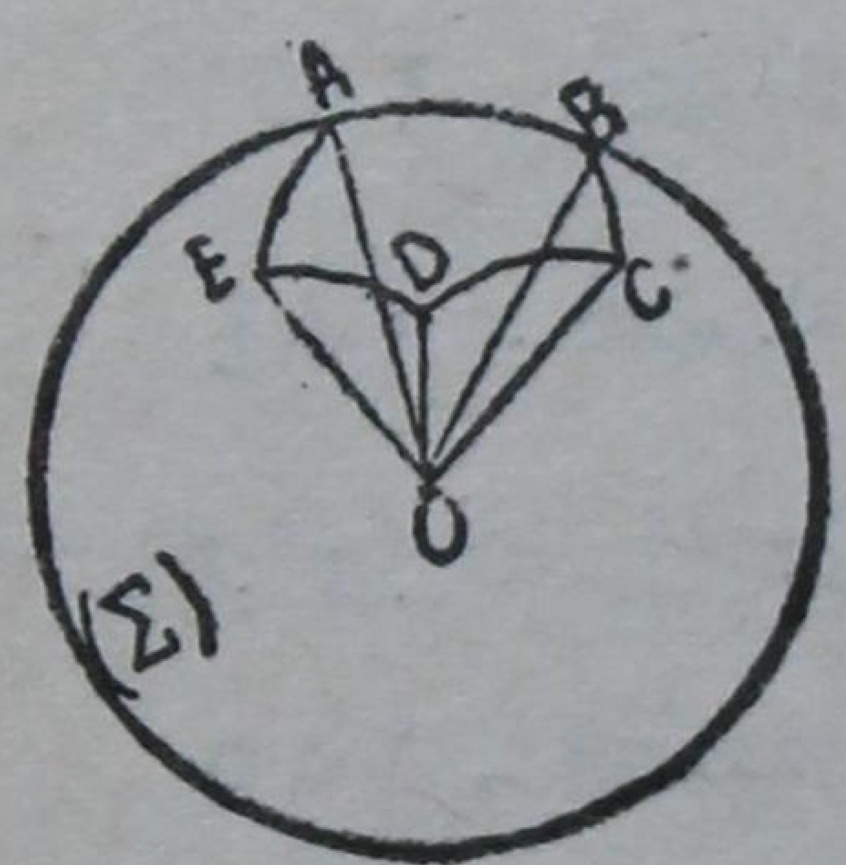
۱۷- حجم حلقه کروی حادث از دوران قطعه دایره‌ای حول یك قطر دایره مساویست بانصف حجم مخروطی که شعاع قاعده‌اش وتر قطعه دایره وارتفاعش تصویر این وتر بر محور دوران باشد . پس اگر قطعه را AB و طول تصویـر

آنرا A'B' فرض کنیم :

$$\text{حجم حلقه} = \frac{\pi}{6} AB^{2} . A'B'$$

## XX سه بر کروی

۲۷۹ - **تعریف - چند بر** کروی قسمتی است ازسطح کره محدود بچند قوس‌ازدوایر بزرك .





(ش۱۸) هر یك از قوسهای دایره بزرك مانند AB را یك پهلو ، نقطه‌تلاقی‌دوپهلو رایك راس وگوشه بین هر دو پهلو را یك گوشه چندبر کروی گویند . پس پهلوهای چندبر کروی را هم با آحاد قوس وزاویه اندازه میگیرند .

**کنج نظیر** یك چندبر کروی آنست که راسش مرکز کره‌و یالهای آن منتهی بروس‌چندبر باشند .

**سه بر کروی** ساده ترین چندبر هاست .

**سه برقرینه** سه‌بر مفروض آنست که روسش انتهای اقطارمیباشد که برروس‌سه‌بر مفروض بگذرند . سه‌بر کروی ممکنست سه گوشهٔ راست یابازداشته باشد. **سه بر قطبی** سه‌بر آنست که هرراس سه‌بر مفروض قطب یك ضلع آن باشد . **درجه کروی** سه‌بری‌است که دوپهلوی آن ۹۰ ویك پهلویش ۱ درجه باشد .اگر ازمجموع زوایای یك سه‌بر کروی ۲ قائمه کم کنیم تفاضل را **فضل کروی** آن سه‌بر گویند .

۲۸۰ - **قضیه** - پهلوهای چندبر کروی مساوی روهای کنج نظیرش و گوشه های آن مساوی فرجه های اینست .

۲۸۱ - **قضیه** - درسه‌بر کروی هر پهلو کوچکترست ازمجموع و بزرگترست از تفاضل دو پهلوی دیگر .

۲۸۲ - **قضیه** - مجموع پهلوهای سه‌بر کروی کوچکترست از چهار قائمه

۲۸۳ - **قضیه** - دوسه‌بر کروی قرینه معادلند .

۲۸٤ - **قضیه** - اگر یك سه‌بر کروی قطبی سه‌بر دیگر باشد دومی نیز قطبی اولی است .

۲۸۵ - **قضیه** - هر گوشه یك سه‌بر کروی متمم پهلوی مقابل براس نظیرش درسه‌بر قطبی آنست .

۲۸٦ - **قضیه** - مجموع گوشه‌های سه‌بر کروی واقعست بین ۲ و٦ قائمه .

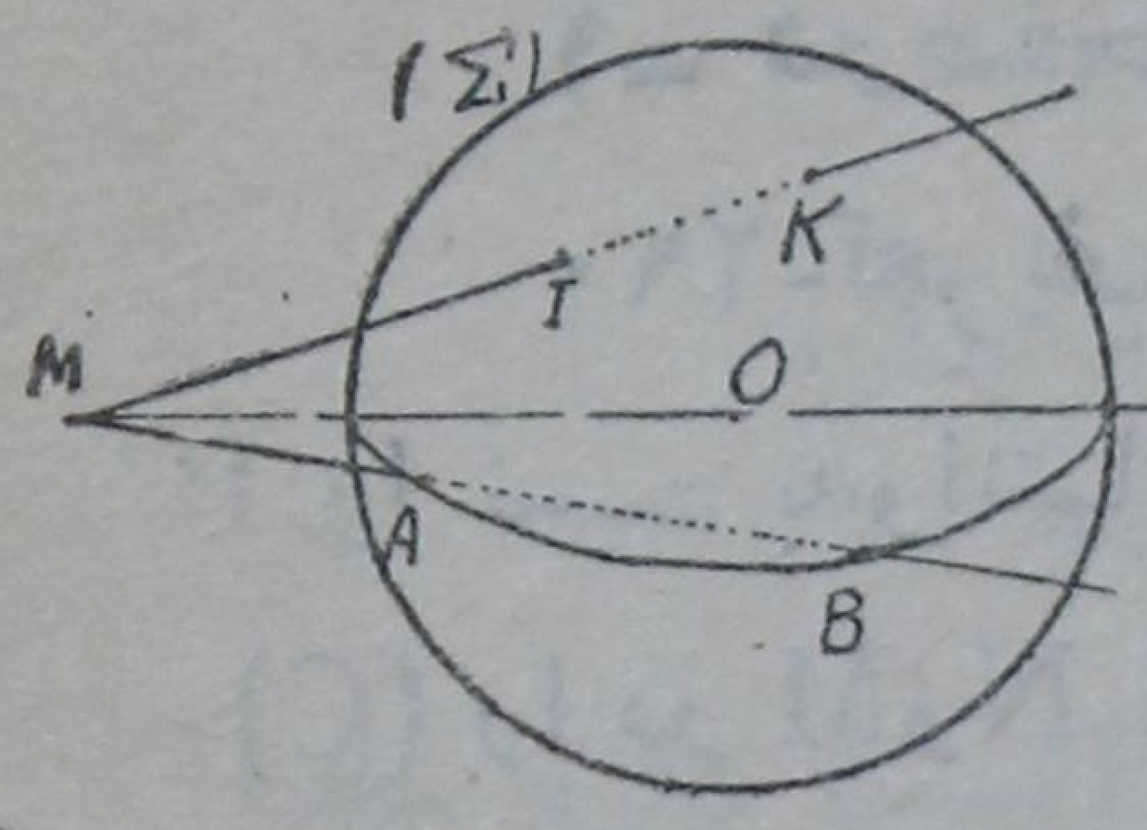
۲۸۷ - **قضیه** - نسبت مساحت سه‌بر بسطح کره مساوی نسبت فضل کروی آنست به ۸ قائمه .

**نتیجه ۱ -**) مساحت سه‌بر کروی نصف حاصلضرب فضل کروی آنست در مساحت دایرهٔ بزرك :

$$S=\frac{۱}{۲}\pi R^{۲}(زA+زB+زC-۱۸۰)$$

۲) اگر سه‌بر سه‌قائمه‌را که $\frac{۱}{۸}$ کره است واحد سطح و زاویه قائمه را واحد زاویه بنامیم سطح سه‌بر مساویست با فضل کروی آن .

# XXIV قوت نقطه نسبت بکره




۲۸۸- هر گاه از نقطه **M**، بفاصلهٔ d از مرکز کره Σ (ش ۱۹۰) ، قاطع غیر مشخصی مرور دهیم تا کره را در I و K قطع کند MI . MK مقداریست ثابت و مساوی $p = d^2 - R^2$.

مقدار p را قوت نقطه M نسبت به کره Σ گویند. برای تکمیل رجوع شود بشمارهٔ ۱۱۹

۲۸۹ . **قضیه** — مکان نقاطی که نسبت بدو کره یک قوه داشته باشند صفحه ایست ، بنام صفحه **اصلی** ، عمود بر خط المرکزین که خط المرکزین را در H قطع کند و

$$OH = \frac{OO'}{2} + \frac{r^2 - r'^2}{2OO'}$$

باشد ( در دو کره متقاطع ، مماس یا متحدالمرکز صفحه اصلی بترتیب صفحه تقاطع آنها ، صفحهٔ مماس مشترك آنها یا صفحه‌ای واقع در بی نهایت است ).

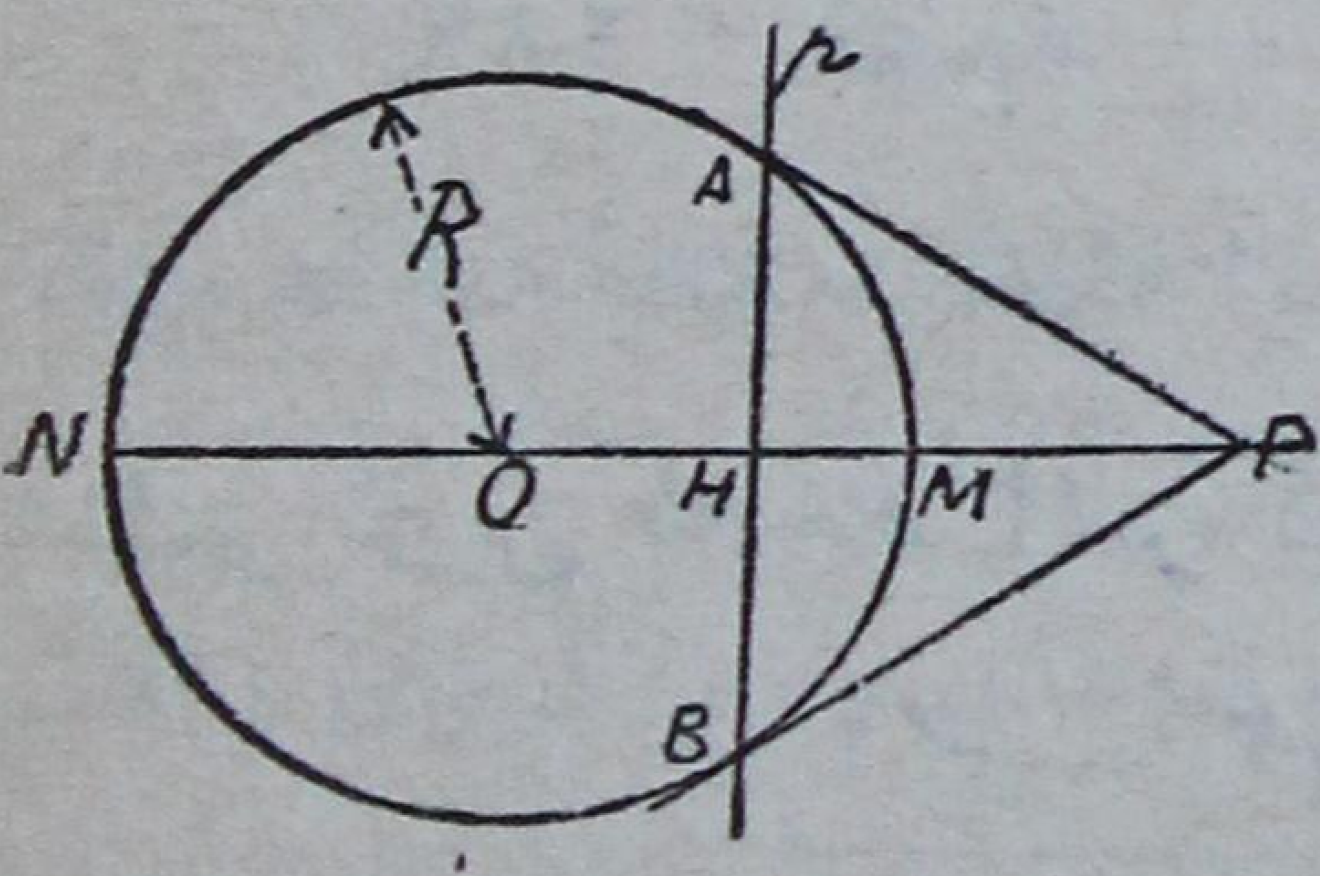
**نتیجه - ۱**) سه صفحه اصلی سه کره یکدیگر را بر یك خط ، بنام **محور اصلی** سه کره ، تلاقی میکنند . ۲) شش صفحهٔ اصلی چهار کره که مراکزشان در یك صفحه نباشند بر یك نقطه ، موسوم به **مرکز اصلی** چهار کره ، میگذرند .

# XXV قطب و قطبی

## ۱- در صفحه (قطب و قطبی نسبت بدایره)

**۲۹۰-تعریف**-مکان هندسی مزدوجهای توافقی یك نقطهٔ P را نسبت بدو انتهای قاطع متحرکی که بر P بگذرد و دایرهٔ (C) را در M و N قطع کند، قطبی P نسبت به (C) گویند.

**۲۹۱-قضیه**- قطبی نقطه P نسبت بدایرهٔ (C) خطی است مانند p عمود بر PO که OP را در H تلاقی کند و؛ $OP \cdot OH = R^2$ باشد.




برحسب آنکه P خارج یا داخل دایره یا روی دایره باشد قطبی آن دایره را قطع میکند، درخارج آن یا در P مماس بر آن است. P را قطب خط p گویند.

**۲۹۲ — قضیه**- قطب هر خط که بر نقطه‌ای بگذرد بر قطبی این نقطه قراردارد و بعکس قطبی هر نقطه که برخطی واقع باشد برقطب این خط میگذرد.

**۲۹۳- اشکال قطبی معکوس**- اگر چند بر ABCDE و دایره (C) در صفحه‌ای مفروض باشند و چندبر A'B'C'D'E' را بدست آوریم بطوریکه هرضلع این قطبی یك رأس آن باشد، هرضلع آن نیز قطبی یك راس‌این خواهد بود. چنین دوشکل را قطبی معکوس یکدیگر گویند.

اگر در شکلی چند نقطه بریك خط باشند در قطبی

معکوس آن چند خط بریك نقطه میگذرند · از این خاصیت برای اثبات قضایای مربوط بخطوط متقارب یا نقاط واقع بریك خط ممکنست استفاده شود ·

**۲ـ درفضا** قطب وقطبی نسبت بکره

**۲۹۴ ـ تعریف ـ** مثل شمارهٔ ۲۹۰

**۲۹۵ ـ قضیه ـ** قطبی یك نقطه P نسبت بکره صفحه ایست مانند ($\pi$) عمود برخط OP که آنرا در H قطع کند و $OP \cdot OH = R^2$ باشد ·

(بقیه مانند شمارهٔ ۲۹۱)

**۲۹۶ ـ قضیه ـ** قطب هرصفحه که برنقطه‌ای بگذرد برصفحه قطبی این نقطه واقع است وصفحه قطبی هرنقطه که برصفحه‌ای واقع باشد برقطب این صفحه میگذرد ·

**نتیجه ـ** قطب‌های جمیع صفحاتی که بر خط D میگذرند بریك خط مانند D' واقعند این خاصیت متقابل است · باینجهت D و D' را دوخط مزدوج نسبت بکره (S) گویند · هریك ازدوخط مزدوج در صفحه ایست که ازمرکز کره بردیگری عمود شود · عمود مشترك آنها برمرکز کره میگذرد وآنها را در k و k' قطع میکند و $Ok . Ok' = R^2$ است ·

## XXVI انعکاس

**۱ـ درصفحه**

**۲۹۷ ـ تعریف ـ** اگر نقطه O و شکل F مفروض باشند واز O به A و B و C ··· نقاط مختلف F وصل کرده در

روی خطوط واصل نقاط $A'$ و $B'$ و $C'$ و ... را بدست آوریم بقسمی که :

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \cdots = p$$

باشد از مجموع نقاط $A'$ و $B'$ و ... شکل $F'$ **منعکس** شکل $F$ نسبت **بمرکز انعکاس** $O$ **باقوت انعکاس** $p$ بدست میآید . اگر هردو نقطه متناظر در یکطرف $O$ باشند $p$ مثبت وگرنه منفی است . هردو نقطه متناظر را **منعکس** یکدیگر میگویند .

هرگاه $p > 0$ باشد و بمرکز $O$ و شعاع $\sqrt{p}$ دایره‌ای رسم کنیم ، این دایره را ، که مکان نقاطیست که برمنعکس خود منطبقند ، **دایره انعکاس** مینامید .

**۳۹۸ - نتیجه** ــ ۱) دو نقطه منعکس نسبت بدایره انعکاس مزدوج یکدیگرند ۲ ) بین $AB$ و $A'B'$ خطوط واصل بین دو نقطه $A$ و $B$ و دو منعکس آنها این رابطه برقرار است :

$$A'B' = AB \times \frac{p}{OA.OB}$$

۳) دو نقطه $A$ و $B$ با منعکسهایشان $A'$ و $B'$ برروی یك دایره قرار دارند .

**۳۹۹ - قضیه** - مماسهای بردومنحنی منعکس دردو نقطه منعکس $A$ و $A'$ با خط $AA'$ زوایای مساوی میسازند

**نتیجه** - منعکس هرزاویه باآن مساویست .

**۳۳۰ - قضیه** - اگر $F'$ و $F''$ منعکسهای $F$ با قوتهای

بانسبت $O$ نسبت بمرکز $F'$ و $F''$ باشند، $O$ نسبت به نقطه $p''$ و $p'$ متحدالعلامه یا $p''$ و $p'$ مجانس یکدیگرند و برحسب آنکه $\frac{p'}{p''}$
مختلف العلامه باشند تجانس آنها مستقیم یامعکوس میباشد .

**۳۰۱ — قضیه -۱** ) منعکس دایره ای که برمرکز انعکاس بگذرد خطیست عمود بر قطری که بر مرکز انعکاس میگذرد . ۲) منعکس هر خط دایره ایست که بر مرکز انعکاس مرور کند. ( اگر خط برمرکز انعکاس بگذرد منعکس آن برخودش منطبق است)

**۳۰۲ -- قضیه** - منعکس هر دایره( که بر $O$ نگذرد) دایره است .

**نتیجه -۱** ) هر دو دایره، منعکس ومجانس یکدیگرند نسبت بنقاط تلاقی مماسهای مشترک خود .؛

۲ ) مماسهای بردونقطه منعکس از دو دایره یکدیگر را روی محور اصلی قطع میکنند

## ۲ — در فضا

**۳۰۳- تعریف** مانندشماره۲۹۷ .

خواص شماره۲۹۸ در فضا نیز صحیح است .

**۳۰۴ - قضیه -۱** ) منعکس هرکره که برمرکزانعکاس بگذرد صفحه است عمود بر قطری که برمرکز انعکاس مرور نماید . ۲) منعکس هر کره کره دیگر است . ۳ ) منعکس هر صفحه کره ایست که برمرکزانعکاس میگذرد .

**۳۰۵ - قضیه** - منعکس هر دایره نسبت بیك نقطه که

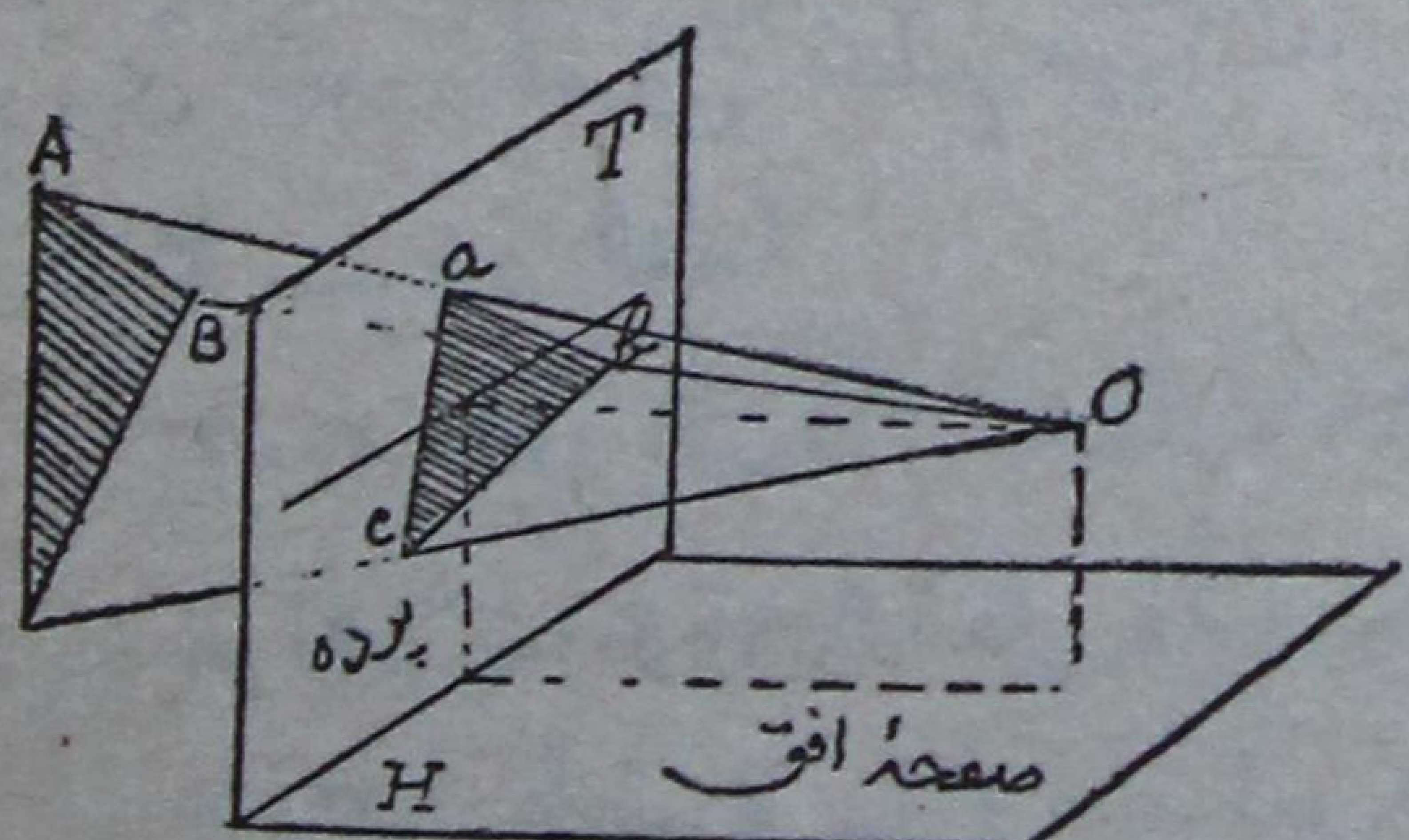
در صفحه دایره نباشد دایره است .

دایره اخیر را **تصویر مرکزی** proj.stéréographique دایره اولی نسبت بمرکز تصویر O میگویند

**نتیجه - ۱)** اگر قاعده مخروط مستدیری برروی کره‌ای باشد این کره مخروط را در دایره دیگری هم قطع میکند ۲) بر هر دو دایره واقع بر یك دایره عموماً میتوان دو مخروط گذارند .

## XXVII مناظر و مرایا ( پرسپکتیو )

۳۰۶- **تعریف**-درشکل F و F′ را گویند نسبت بیکدیگر دروضع **منظری** هستند ، یا یکی **تصویر مرکزی** یا **تصویر مخروطی** یا **پرسپکتیو** دیگریست هر گاه هر نقطه و نقطه متناظر آن با نقطه ثابتی مانند O بریك امتداد باشند. نقطه O را **مرکز تصویر** یا **نقطه دید** میگویند. **پرده** صفحه‌ایست که بخواهیم پرسپکتیو جسمی را بر روی آن رسم کنیم (ش ۲۱) .




ش ۲۱

P موقع عمودی را که از نقطه دید بر پرده فرود آید **نقطه اصلی** و فاصله OP را **فاصله اصلی** وخط HH′ که از نقطه اصلی موازی سطح افق رسم شود **خط افق** و دو نقطه D و D′ را که برروی HH′ بفاصله ای مساوی فاصلهٔ اصلی از P اختیار شوند **نقاط مسافت** میگویند .

**پرسپکتیو هر نقطه** مانند A نقطه A′ محل تلاقی شعاع دید OA ـ با پرده.

**پرسپکتیو هر خط** مانند AB خط A′B′ فصل مشترک صفحه OAB است با پرده .

**نقطه گریز** — هرگاه از O خطی موازی AB رسم کنیم تا پرده را در f قطع کند، که پرسپکتیو نقطه بی نهایت دور خط AB است، نقطه گریز AB نامیده میشود،

**خط گریز** ـ هر گاه از O صفحه ای موازی صفحه ABC رسم کنیم تا پرده را بر خط F قطع کند F، که پرسپکتیو خط بی نهایت دور صفحه A BC است ، **خط گریز** آن صفحه نامیده میشود . صفحه ای را که موازی پرده رسم شود **جبهی** مینامند

**۳۰۷ ـ قضیه** — پرسپکتیوهای خطوط موازی بر یك نقطه میگذرند ( نقطه گریز مشترك آنها ) .

**نتیجه** ـ اگر خطوط موازی با پرده هم موازی باشند پرسپکتیو های آنها متوازیند .

**۳۰۸ ـ قضیه** ـ خطوطی که یکدیگر را در روی صفحه جبهی مار بر نقطهٔ دید تلاقی کنند پرسپکتیوهایشان متوازیند.

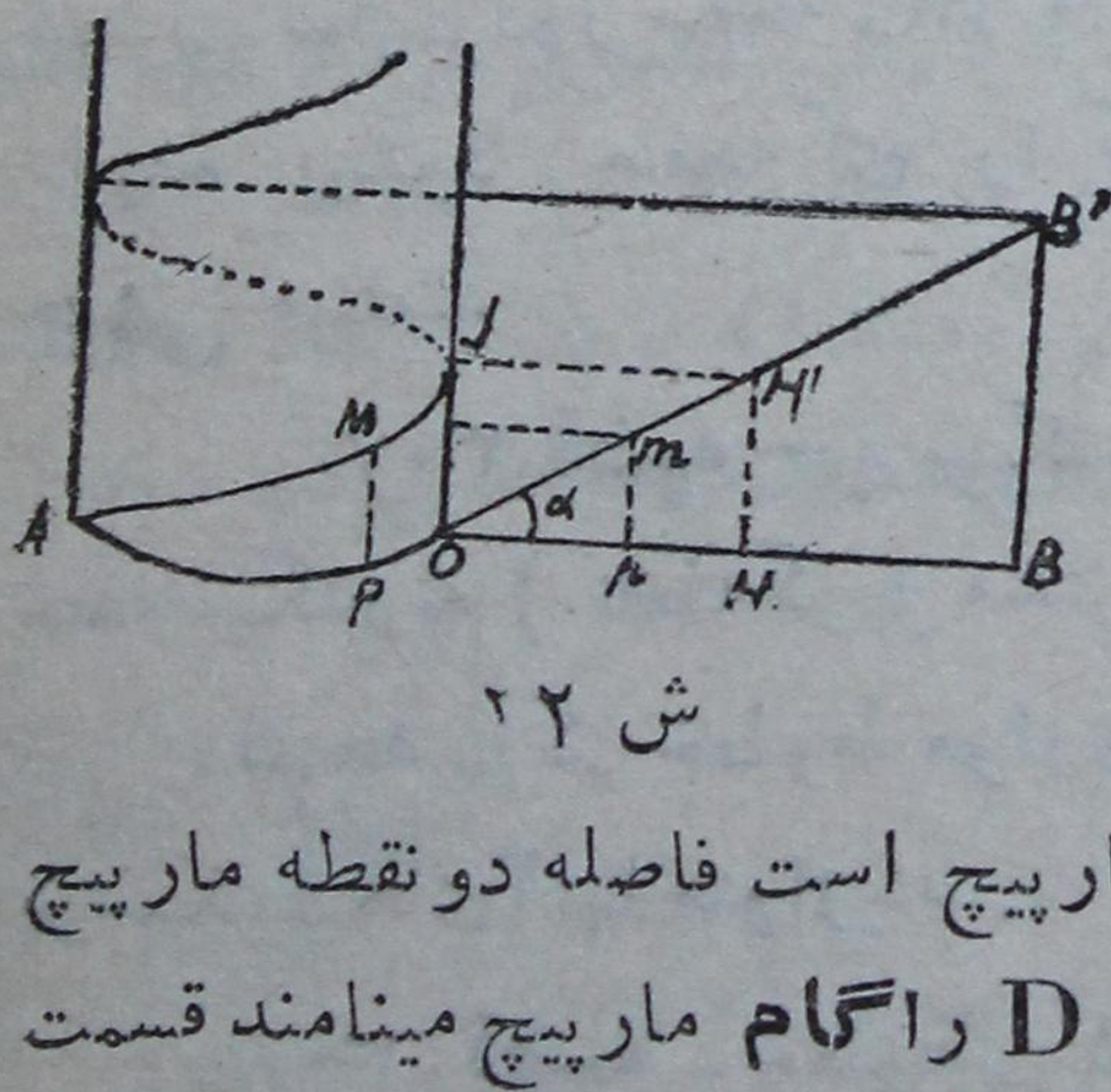
**۳۰۹ ـ قضیه** ـ نقاط گریز خطوط افقی در روی خط افق HH′ قراردارند .

**حالت خاص** ـ نقاط گریز خطوط افقی که با پرده زاویه ۴۵° تشکیل میدهند نقاط مسافت D و D′ هستند.

۳۱۰ قضیه - ۱ ) پرسپکتیو دایره یك قطع مخروطی ( بیضی ، هذلولی یاشلجمی ) است ۲۰ ) پرسپکتیو یك قطع مخروطی ممکنست دایره باشد.

## XXVIII مارپیچ Hélice

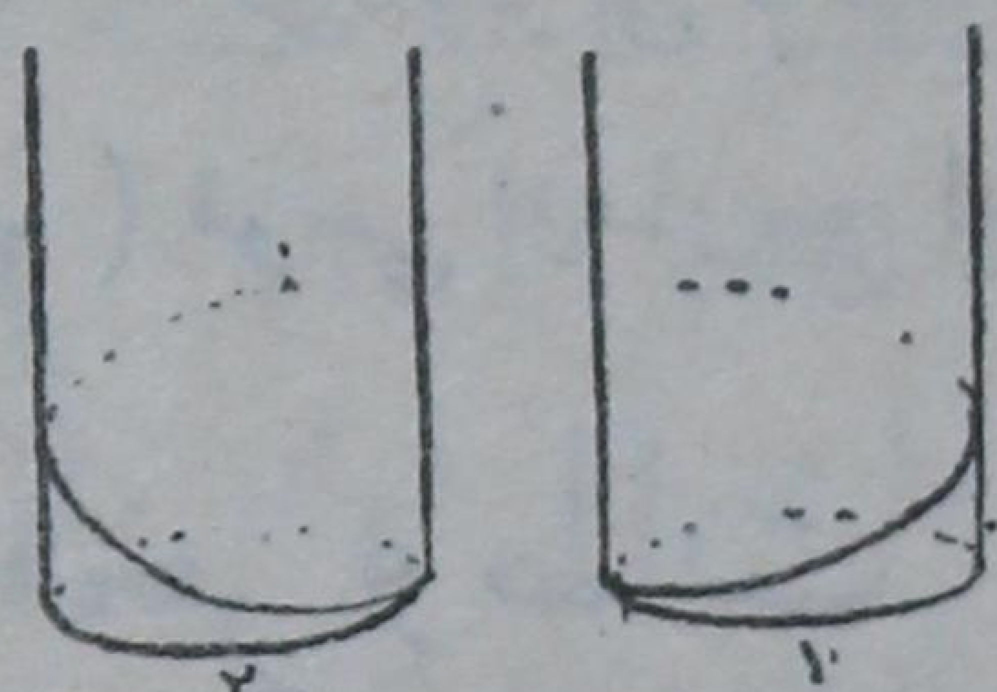
۳۱۱ — **تعریف** اگرزاویه‌ای مانند $\alpha$ حول استوانه مستدیر قائمی چنان بپیچید که یك ضلع آن برقاعده منطبق شود ضلع دیگر برتنهٔ استوانه خمی ترسیم میکند که **مارپیچ** یا **حلزونی** نام‌دارد . (ش۲۲)



ش ۲۲

چون استوانه‌واضلاع زاویه‌نامحدودند مارپیچ هم بی پایان‌میباشد. محور وشعاع استوانه **راجان** âme و شعاع مارپیچ و ظل زاویه $\alpha$ **راشیب** آن گویند . نقطه A **مبداء** مارپیچ است فاصله دونقطه مارپیچ واقع بریك مولد مانند A و D **راگام** مارپیچ مینامند قسمت MP از مولد محدود بین یك نقطه M ازمارپیچ و قاعدهٔ استوانه را**عرض** نقطه M و قوس AP واقع بین مبداءو نقطه P ، تصویر M، را **طول منحنی** نقطه M میگویند . قسمتی از مارپیچ که فاصله دوسر آن یك گام باشد یعنی از یك دور کامل تشکیل شده باشد یك پیچ نام دارد.

پیچ ممکنست **براست** dextrorsum ( ش ۲۳ ) یا **بچپ** sinistrorsum (ش ۲٤ ) باشد یعنی در قسمت مرئی استوانه بطرف **راست** یا بطرف **چپ** بالا برود .



(ش ۲٤) ( ش ۲۳ )

۳۱۲ — **قضیه** — عرض هر نقطه مارپیچ متناسب است با طول منحنی آن نقطه . این نسبت مساوی شیب مارپیچ است

**تعریف** — از قضیه فوق این تعریف برای مارپیچ نتیجه میشود : مارپیچ منحنی ایست که بر استوانه قائم مستدیری پیچیده شده باشد و عرض هر نقطهٔ آن متناسب با طول منحنی آن نقطه باشد .

۳۱۳ — مارپیچهای واقع بر یك استوانه یا استوانه‌های متساوی را که در یك جهت بوده وشیبشان با هم برابر باشد **متساوی** گویند .

۳۱٤ — **مماس بر مارپیچ** — **قضیه** — بر هر نقطه از مارپیچ مماسی میتوان رسم کرد . تصویر آن بر صفحهٔ قاعده استوانه مساوی طول منحنی نقطه تماس است .

۳۱۵ — **نتیجه** — میل مماسهای بر مارپیچ با صفحه قاعده مقداریست ثابت .

**۳۱۶ — معادله مارپیچ**

$$y = kx = \frac{h}{2\pi r} x \qquad (h = \text{گام})$$

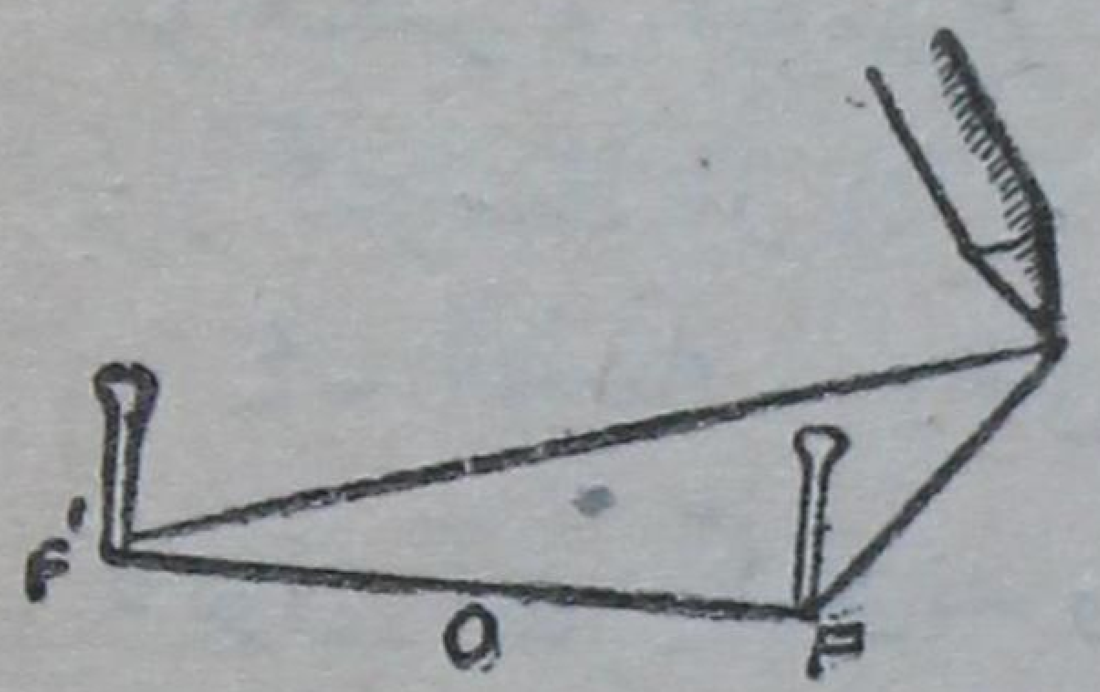
**۳۱۷ — قضیه** — کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه از سطح استوانه (مستدیر قائم) قوسی از مارپیچ است.

# مخروطات

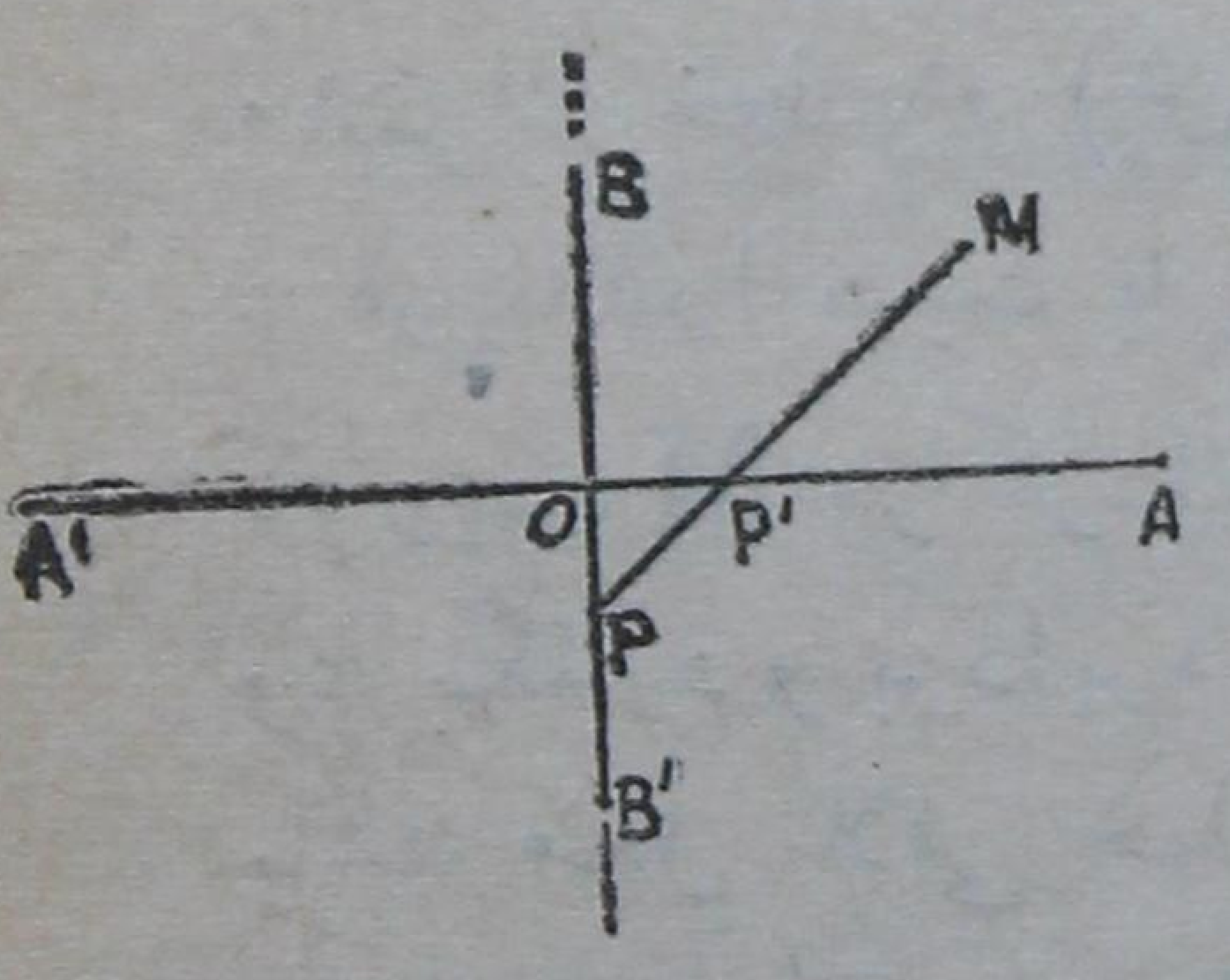
## بیضی

۱ — **تعریف** بیضی مکان نقاطیست که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت $F$ و $F'$ مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد. $F$ و $F'$ را دو **کانون**، $FF' = 2c$ را **فاصله کانونی**، $O$ وسط $FF'$ را مرکز، خط $AA'$ را که بر $F$ و $F'$ میگذرد و دو انتهای آن $A$ و $A'$ از $O$ بفاصله $a$ هستند **محور اطول**، خط $BB'$ را که از $O$ بر $AA'$ عمود شود و دو انتهای آن $B$ و $B'$ از نقطه $O$ بفاصله $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ باشند **محور اقصر**، $A$ و $A'$ و $B$ و $B'$ را چهار رأس، نسبت $e = \frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز**، دایره‌ای را که بمرکز $O$ و شعاع $OA = a$ رسم شود **دایره اصلی**، دو دایره را که بمراکز $F$ و $F'$ و شعاع $2a$ رسم شوند **دوایر هادی** و هر خطی را که از یک کانون بیک نقطه $M$ از بیضی وصل شود **شعاع حامل** مینامند.

**۲- رسم بیضی** - ۱) باحرکت متصل - دو سنجاق دردو کانون کوبیده دو انتهای نخی بطول $2c + 2a$ را گره میزنیم نخ را از پشت سنجاقها رد میکنیم و نوك مدادی را درداخل آن چنان حرکت میدهیم که نخ همیشه کشیده شده باشد نوك مداد بیضی رسم میکند (ش ۱). ۲) با نقاط یا بی $F$ را مرکز قرار داده باشعاع $l < 2a$ قوسی رسم میکنیم بعد بمرکز $F'$ و شعاع $2a - l$ قوسی میزنیم تا قوس اول را در $M$ و $M'$ قطع کند. این نقاط متعلق به بیضی هستند. ۳) رسم بیضی بکمك حاشیه کاغذ - اگر $OA$ و $OB$ نیمی ازمحورهای بیضی باشند (ش ۲) بر روی لبه کاغذی مانند $PP'M$ طولهای $PM$ و $P'M$ را بترتیب مساوی $a$ و $b$ جدا میکنیم و بعد کاغذ را بر صفحه چنان میلغزانیم که همواره $P$ و $P'$ بترتیب بر $OB$ و $OA$ (یا امتداد آنها) باشند. $M$ در روی بیضی تغییر مکان میدهد (رجوع شود بشمارهٔ ۲۱).




ش ۱




ش ۲

تبصره - بکمك حاشیه کاغذ میتوان باداشتن یك محور و یك نقطه از بیضی محور دیگر رابدست آورد باینطریق که اگر $OA$ نصف محور معلوم و $M$ نقطه معلوم باشند بمرکز $M$ و شعاع $a$ قوسی میزنیم تا عمودی را که از $O$ بر $OA$

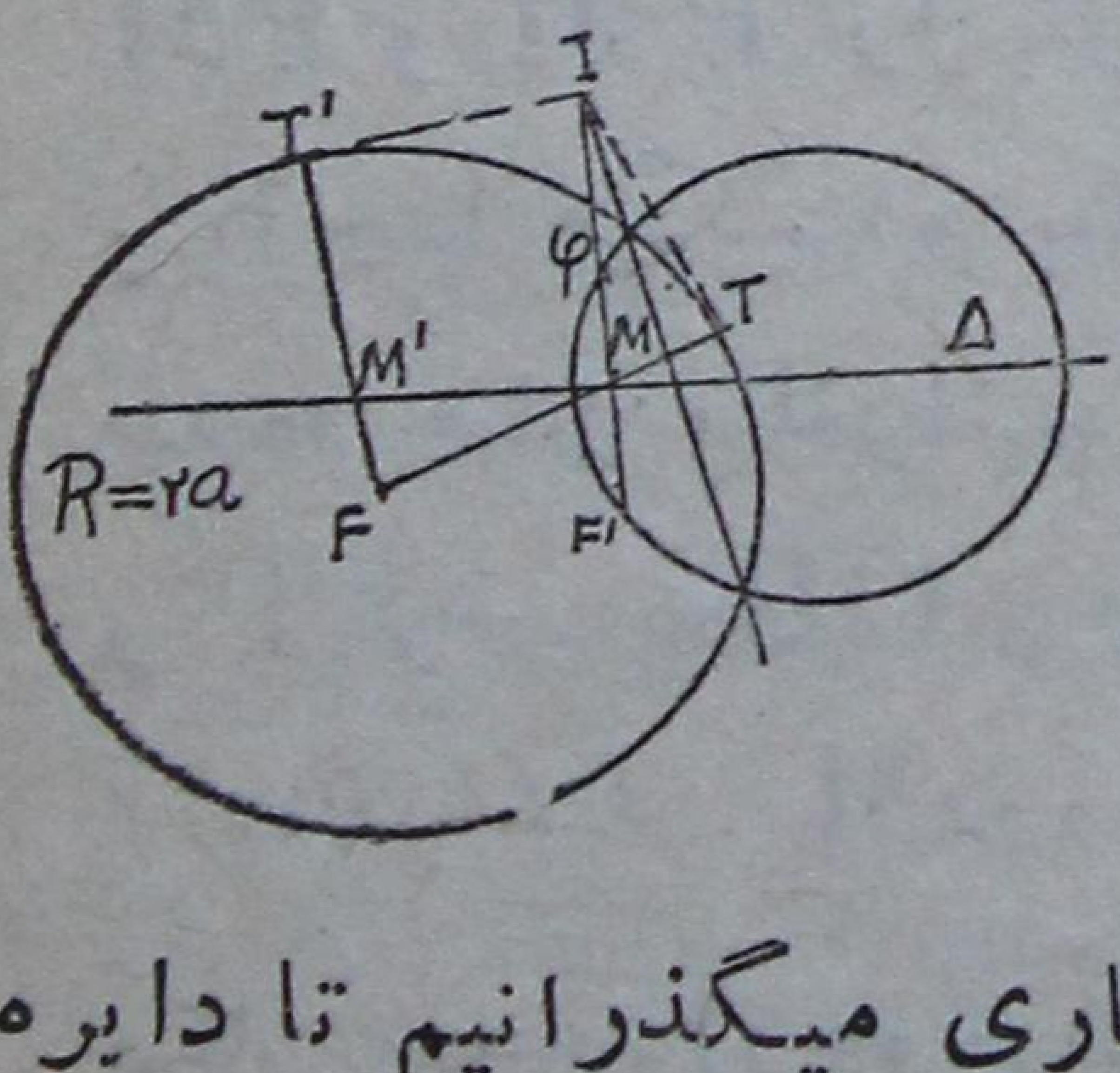
خارج شده باشد در P قطع کند ، بعد کاغذ را بر PO منطبق نموده نقاط M و P و P′ را نشان میکنیم MP′ نصف محور مجهول است .

**۳ — قضیه.** مجموع فواصل نقاط درون بیضی از دو کانون کوچکتر و مجموع فواصل نقاط بیرون آن از دو کانون بزرگترست از ۲a .

**٤ـ قضیه .** بیضی مکان مراکز دوایر یست که بیکی از دو کانون آن بگذرند و بر دایرهٔ هادی کانون دیگر مماس باشند .

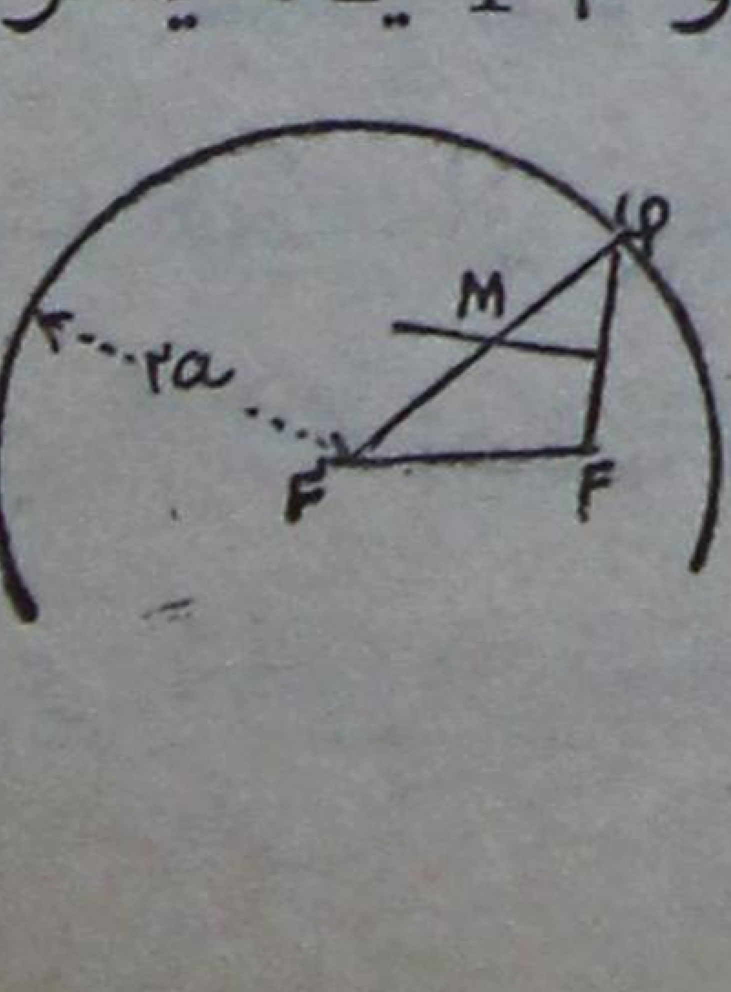
**۵ـ رسم بیضی باستفاده از دایره هادی** ـ از F (ش۳) به φ نقطه غیر مشخصی از دایره هادی وصل میکنیم عمود منصف Fφ شعاع F′φ را در M قطع میکند . M روی بیضی است .

**٦ـ فصل مشترك خط و بیضی** ـ اگر بخواهیم فصل مشترك خط △ (ش ٤) را با بیضی (F ، F′ ، ۲a) پیدا کنیم




φ قرینه F را نسبت به △ بدست می‌آوریم ، M مرکز دایره‌ای که بر F و φ بگذرد و بر دایره هادی F′ مماس باشد محل تلاقی خط و بیضی است.

برای بدست آوردن M باینطریق عمل میکنیم : بر F و φ دایره اختیاری میگذرانیم تا دایره هادی F′ را در C و D قطع کند . CD و Fφ یکدیگر را در I تلاقی میکنند ز I مماسهای IT و IT′ را بر دایرهٔ هادی F′ رسم می‌کنیم ، F′T و F′T′ خط △ را در



M و 'M قطع میکنند . M و 'M جوابهای مسئله‌اند (اگر I روی دایره هادی 'F واقع شود خط با بیضی مماس است و اگر I در درون دایره هادی افتد خط بیضی را قطع نمیکنند) .

مماس بر بیضی

**۷ـ قضیه**ـ مماس بر هر نقطه از بیضی گوشه بین یك شعاع حامل وامتداد شعاع دیگر را نصف میکنند .

**نتیجه** — ۱) قرینه هر کانون نسبت به مماس بر روی دایرهٔ هادی کانون دیگرست ۲) مماس برهر رأس عمودست بر محور .

**۸ـ قضیه** — قائم برهر نقطه‌از بیضی گوشه بین دو شعاع حامل را نصف میکند .

**نتیجه** — مماس وقائم برهر نقطه از بیضی 'FF را به نسبت توافقی تقسیم میکنند .

۹ — **قضیه**— La Hire ـ تصویرهر کانون برروی مماس واقعست برروی دائرهٔ اصلی .

**۱۰ — رسم مماس بر بیضی** - ۱) ازنقطه واقع بر بیضی : دوشعاع حامل را میکشیم ،منصف گوشه خارجی آنها مماس مطلوبست .

۲) ازنقطه P خارج بیضی : بمرکز P و شعاع PF دایره‌ای میزنیم تادایرهٔهادی 'F رادر φ و 'φ قطع کند،عمودهائی که از P بر Fφ و 'Fφ فرود آیند دومماس مطلوبند(شرط

امکان متقاطع بودن دایره مرسوم با دایره هادی 'F است، یعنی باید P بیرون بیضی باشد).

۳) مماس موازی امتداد △ : از F عمودی بر △ فرود میآوریم تا دایره هادی 'F را در φ و 'φ قطع کند، عمود منصف های Fφ و 'Fφ را رسم مینمائیم. مسئله همیشه دو جواب دارد.

۱۱ — **نتیجه** - وتر واصل بین نقاط تماس دو مماس موازی برمرکز بیضی میگذرد.

۱۲ — **قضیه** Poncelet - ۱) اگر از P دو مماس بر بیضی رسم شود این دو مماس با PF و 'PF گوشه‌های مساوی میسازند. ۲) خطی که از P بیکی از دو کانون وصل شود منصف گوشهٔ اشعهٔ حاملی است که از این کانون بدو نقطه تماس منتهی گردند.

۱۳ — **قضیه** — مماس متحرکی که بین دو مماس ثابت بر بیضی محدود باشد از هر کانون بزاویهٔ ثابتی دیده میشود.

۱٤ — **قضیه** — مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر بیضی دایره ایست بمرکز O و شعاع $\sqrt{a^2 + b^2}$

۱۵ — **قضیه** — ۱) حاصلضرب فواصل دو کانون از هر مماس مساویست با $b^2$ ؛ ۲) اگر از یك کانون خطی موازی مماس رسم کنیم تفاضل مربعات فواصل مرکز از مماس و از خط مرسوم مساویست با $b^2$

۱۶ -- **قضیه** Chasles -- مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر دو بیضی متحدالکانونین بمحورهای a و b و a' و b' دایره ایست بمرکز O وشعاع :

$$\sqrt{a^2 + b'^2} \quad \text{یا} \quad \sqrt{a'^2 + b^2}$$

## شعاعهای حامل - معادله بیضی

۱۷ -- **قضیه** -- شعاعهای حامل هر نقطه M از بیضی که فاصله تصویر آن* برمحور اطول ازمرکز بیضی x فرض شود بترتیب عبارتند از

$$a - \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad a + \frac{cx}{a}$$

۱۸ -- **قضیه** -- اگر محورهای بیضی محور های مختصات فرض شوند (محورا طول محورطولها) معادلهٔ بیضی عبارتست از

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

## بیضی تصویر دایره است

۱۹ -- **قضیه** -- تصویر قائم دایره برصفحه بیضی ایست که طول محور اطول آن a و طول محور اقصرش $a \cos \alpha$ ($\alpha$ زاویه بین صفحه دایره وصفحه تصویر) میباشد.

۲۰ -- **قضیه** -- مساحت بیضی مساویست با $\pi ab$

**نتیجه** - برای بدست آوردن مساحت هر جزء از بیضی باید مساحت جزء نظیر آن را دردایره اصلی بدست آورد ودر $\frac{b}{a}$ ضرب کرد.

۲۱ — **قضیه** - نسبت عرض نقاط مختلف بیضی بعرض نقاط نظیر آنها از دایره اصلی مساوی مقدار ثابت $\frac{b}{a}$ است. (نقطه نظیر آنست که با نقطه مفروض درروی عمودی بر $AA'$ واقع باشند)

**۲۲ - رسم مماس** - ۱) از یك نقطه $M$ واقع بر بیضی - نظیر نقطه مفروض را برروی دایره اصلی یافته از آن مماسی بردایره اصلی رسم میکنیم واز محل نقاطع این مماس بامحور اطول بیضی به $M$ وصل مینمائیم. ۲) از نقطه $M$ خارج بیضی - نقطه $M'$ را که عرض آن $\frac{a}{b}$ عرض $M$ باشد یافته از آن مماس $M'T'$ را بردایره اصلی رسم میکنیم تامحور اطول را در $I$ قطع کند $MI$ مماس بر بیضی است و نقطه تماس واقع است درروی عمودی که از $T'$ بر محور اطول فرود آید. ۳) مماس موازی امتداد $\triangle$ - فصل مشترك $\triangle$ را بامحور اطول بدست آورده نقطه $M'$ را هم که عرض آن $\frac{a}{b}$ یك نقطه $M$ از $\triangle$ باشد تعیین میکنیم بردایره اصلی مماسهائی موازی $IM'$ میکشیم و در روی عمود هائیکه از نقاط تماس بر محور اطول فرود آیند نقاطی که عرضشان بعرض نقاط مماس بر نسبت $\frac{b}{a}$ باشد تعیین نموده از این نقاط خطوطی متوازی $\triangle$ رسم میکنیم.

# II هذلولی

**۲۳ - تعریف** - هذلولی مکان نقاطیست که تفاضل

فواصلشان ازدونقطه ثابت F و 'F مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد.
سایر تعاریف مانند شمارهٔ ۱ (فقط. باید توجه کرد که محور اقصر هذلولی درحقیقت وجود ندارد وبرای شباهتی که بین خواص بیضی و هذلولی هست خطی را که از وسط دو کانون بطول $b=\sqrt{c^2-a^2}$ برمحورشکل عمودشودمحوراقصر مینامند) درهذلولی بجای محوراطول اغلب گفته‌میشود**محورقاطع.**

اگر $b=a=\frac{c\sqrt{2}}{2}$ باشد هذلولی را **متساوی‌المحورین** میگویند.

**۲۴ - رسم هذلولی - ۱)** باحرکت متصل: خط کشی بطول l را حول سنجاقی که در یك کانون فرورفته باشد دوران میدهیم، نخی بطول $l-2a$ اختیار میکنیم، یك سرآنرا بانتهای خط کش کوبیده سر دیگرش را در کانون دیگر ثابت نگاهمیداریم. نوك مدادی که همواره نخ را بر خط کش متکی نگاهدارد قسمتی ازهذلولی رسم میکند. ۲) با نقاط یابی: مانند بیضی بارسم قوسهائی بشعاعهائی l و $l+2a$.

**۲۵ - قضیه -** تفاضل فواصل هر نقطه درون هذلولی از دوکانون بزرگتر و از آن نقاط بیرون هذلولی کوچکتراست از $2a$. وبعکس.

**۲۶ - قضیه -** هذلولی مکان هندسی نقاطیست که ازیك کانون و دایرهٔ هادی کانون دیگر بیك فاصله باشند (مکان

مراکزدوایریست که بریك کانون بگذرندو بردایره کانون‌هادی دیگر مماس باشند).

**۲۷- فصل مشترك خط و هذلولی**- مانندفصل مشترك خط و بیضی

## مماس بر هذلولی

**۲۸- قضیه** - مماس برهذلولی زاویه بین دوشعاع حامل را نصف میکند.

**نتیجه۱**- رجوع شود بشمارهٔ ۷ (نتیجه۱و۲)

**نتیجه۲**- قائم برهر نقطه ازهذلولی زاویه بین یك شعاع حامل وامتداد شعاع دیگررا نصف میکند

**نتیجه۳**- رجوع شود به شمارهٔ ۸ (نتیجه)

**۲۹- قضیه** - تصویرهر کانون برروی مماس واقعست بردایرهٔ اصلی.

**۳۰- رسم مماس** - مانند شمارهٔ ۱۰ . فقط باید توجه کرد که رسم مماس موازی امتداد معین فقط وقتی جواب دارد که عمودیکه ازیك کانون بر آن امتداد فرود میآید دایرهٔ هادی کانون دیگررا قطع کند (یعنی عمود برامتداد مفروض درداخل زاویهٔ بین دومماسی باشد که ازیك کانون بردایره هادی کانون دیگررسم میشوند).

**۳۱- قضیه پونسله** - مانند بیضی (شمارهٔ۱۲)

**۳۲- قضیه** - عین خواص مندرج درشمارهٔ ۱۵

## مجانبهای هذلولی

۳۳ - **تعریف** - (رجوع شود بشماره ۱۸۸ قسمت جبر)
— و نیز میتوان گفت مجانب هذلولی مماسی است که نقطه تماس آن بینهایت دور باشد .

۳۴ — **قضیه** — هذلولی دو مجانب دارد که بر مرکز آن میگذرند.

**نتیجه ۱** - مجانبها نسبت بدو محور قرینه یکدیگرند

**نتیجه ۲** — دو مجانب هذلولی عمودهائی هستند که از O بر مماسهائی که از F و F' بر دایره اصلی رسم میشوند فرود آیند.

۳۵ — **قضیه** — مجانبها دو قطر مستطیلی هستند که مرکزش O و اضلاعش با دو محور موازی و بترتیب مساوی $2a$ و $2b$ باشند .

**نتیجه ۱** — دو مجانب هذلولی متساوی المحورین برهم عمودند .

**نتیجه ۲** — فاصله هر کانون از هر مجانب مساوی $b$ است.

## شعاعهای حامل - معادله هذلولی

۳۶ — **قضیه** — شعاعهای حامل هر نقطه هذلولی مساوی هستند با :

$$\frac{cx}{a} - a \quad \text{و} \quad \frac{cx}{a} + a$$

($x$ فاصله O از عمودیست که از نقطه مفروض بر محور قاطع فرود آید )

۳۷ — **قضیه** — اگر نقطهٔ O مرکز ومحورهای هذلولی محوو های مختصات باشند معادله هذلولی :

$$\frac{x^{2}}{a^{2}} - \frac{y^{2}}{b^{2}} = 1$$ میباشد

**نتیجه** — معادله هذلولی متساوی‌المحورین :

$$x^{2} - y^{2} = a^{2}$$ است

**نتیجه ۲** — اگر مجانبهای هذلولـی متساوی‌المحورین محورهای مختصات فرض شوند معادله آن :

$$xy = \frac{a^{2}}{2}$$ یا $$xy = \frac{c^{2}}{4}$$ میباشد.

## III سهمی (شلجمی)

۳۸ — **تعریف** — سهمی مکان هندسی نقاطیست که از یك نقطه، بنام **کانون**، و یك خط، بنام **هادی**، بیك فاصله باشند. خطی که از کانون بگذرد و بر هادی عمود باشد **محور**، فاصله کانون از هادی پارامتر وخطوطی که یکی یك نقطه M را بکانون F وصل کند و دیگـری از M بر هـادی عمـود باشد **شعاعهای حامل** نام‌دارند. محل تلاقی محور با سهمی **راس** آنست. تصویر قسمتی از مماس واقع بین نقطه تماس وامتداد محور بر محور را **تحت ظل** وتصویر قسمت مشابه از قائم‌را **تحت قائم** گویند.

۳۹ — **رسم سهمی** — ۱) باحرکت دائم- خط کشی در مقابل هادی میگذاریم، یك سرنخی بطول‌یك ضلع گونیائیرا

بکانون و سر دیگر آنرا بنقطه تلاقی آن ضلع باوتر گونیا ثابت نموده ضلع دیگر گونیا را متکی بخط کش میلغزانیم، نوك مدادی که نخ را همیشه بضلع گونیا متکی نگاهدارد قسمتی از سهمی را رسم میکند. ۲) ترسیم با نقطه یابی - از کانون بنقطه غیر مشخص N از هادی وصل میکنیم ، عمود منصف FN عمودیرا که از N بر هادی اخراج شوددر M قطع میکند ، M واقعست برروی سهمی. راه‌دیگر: F کانون و P محل تلاقی محور و هادی فرض میشوند، خط △ را موازی هادی رسم میکنیم تا محور را در D تلاقی کند. بمرکز F و شعاعی مساوی PD قوسی میزنیم تا △ را در M و M قطع کند، این دو نقطه بر روی سهمی هستند.

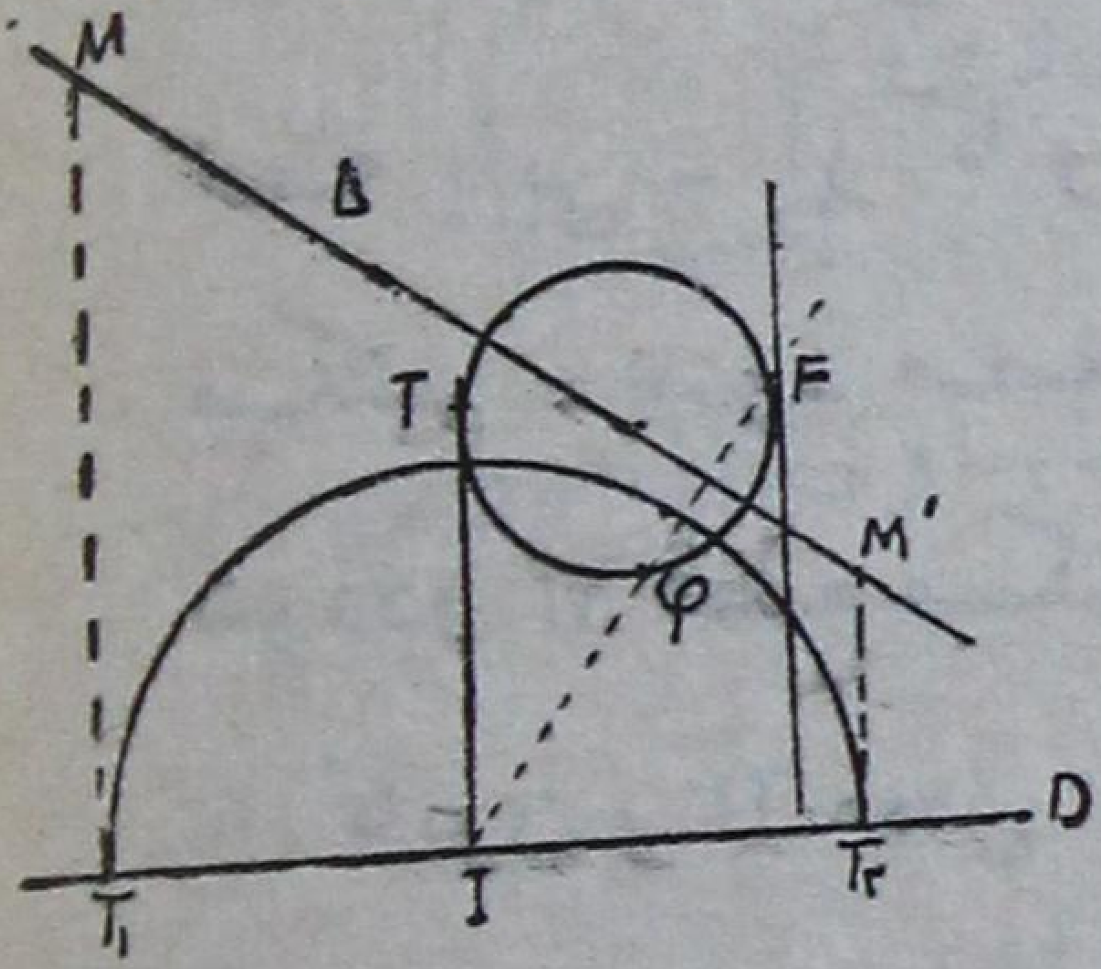
۴۰ — **قضیه** - هر نقطه درون سهمی بکانون نزدیکتر است تا بهادی و هر نقطه بیرون آن بهادی نزدیکترست تا بکانون. و بعکس.

۴۱ — **قضیه** — خطی که از F بر هادی عمود شود محور تقارن سهمی است (بهمین جهت محور نامیده میشود).

۴۲- **قضیه** — سهمی حد یك بیضی است که یك رأس و یك کانون آن ثابت بمانند ولی کانون دیگر در روی محور اطول بی‌نهایت دورشود.

**تبصره** — ازقضیه فوق میتوان استفاده کرد وبسیاری از حواص سهمی را بااستفاده ازخواص مشابه در بیضی ثابت نمود.

**۴۳ـ فصل مشترك خط وسهمی** — برای بدست آوردن فصل مشترك خط Δ با یك سهمی که کانون و هادی آن F و (D) هستند (ش۵) φ قرینه F را نسبت به Δ یافته دایره‌ای رسم میکنیم که بر F و φ بگذرد و بر (D) مماس شود , مرکز این دایره فصل مشترك سهمی با Δ است . برحسب آنکه φ و F یك طرف (D) واقع شوند یا φ بر (D) قرار گیرد خط سهمی را دوجا قطع میکند یا بر آن مماس است .اگر φ آن طرف (D) واقع شود خط منحنی را قطع نمی نماید .




( ش۵ )

**مماس بر سهمی**

**۴۴ـ قضیه** — مماس بر سهمی منصف زاویه بین دو شعاع حامل است .

**نتیجه ۱** — قرینه کانون نسبت بهر مماس بر خط هادی واقع است .

**نتیجه ۲** ـ اگر از F خطی برشعاع حامل نقطهٔ تماس عمود کنیم ، این خط برمحل تلاقی مماس با هادی میگذرد .

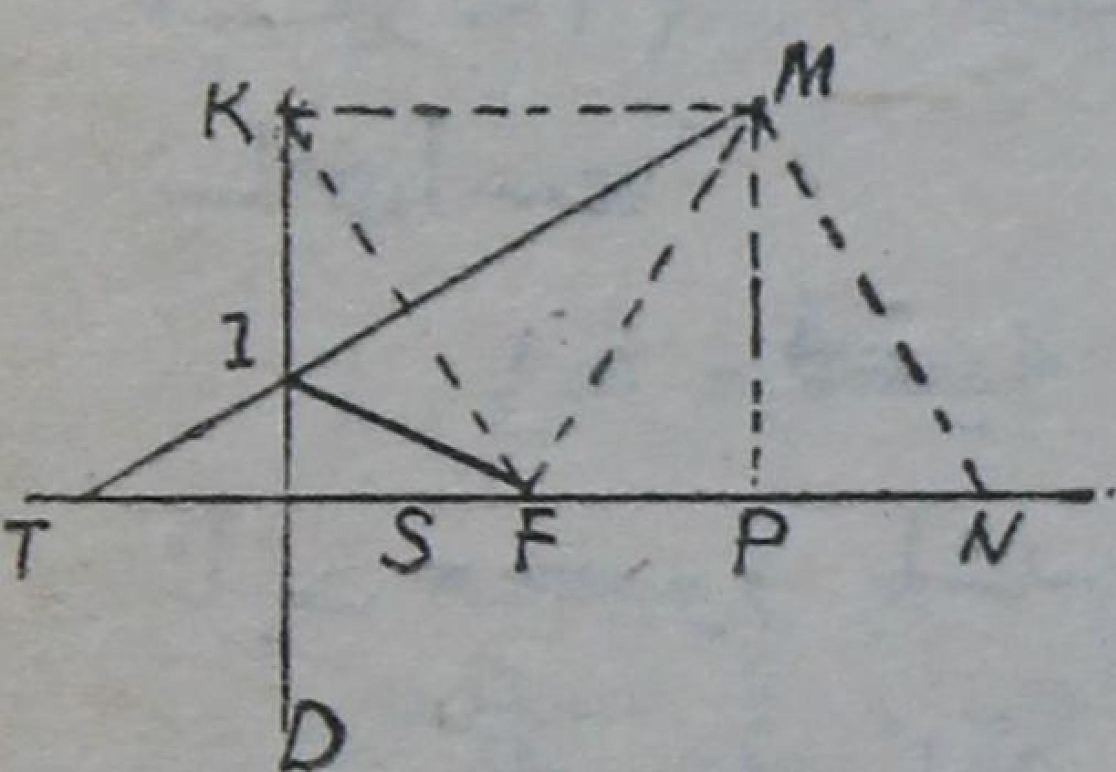
**نتیجه۳**— قائم برسهمی منصف زاویه بین یك شعاع حامل و امتداد دیگریست .

**۴۵ ـقضیه** — مماس برراس مکان تصاویر کانون بر مماسهای برسهمی است .

۴۶ **قضیه** - ۱ ) راس سهمی تحت قائم را بدو جزء مساوی تقسیم میکند ۲۰ ) تحت قائم مساوی پارامتر ( ممیز ) سهمی است.

**نتیجه** - کانون سهمی از نقاط برخورد مماس و قائم هر نقطه با محور بیك فاصله است .

۴۷ -**رسم مماس بر سهمی** ۱ ) از نقطه M واقع بر منحنی : از M منصف زاویه بین MP وعمودیرا که از M بر هادی فرود آید رسم میکنیم (ش ٦) **راه دیگر :**



(ش ٦)

FT را مساوی FM بر محور نقل میکنیم , MT مماس مطلوبست . **راه سوم** : ST رامساوی SP جدا میکنیم MF مماس است. **راه چهارم** : عمود بر MT هادی را در I قطع میکند MI جواب مسئله است . **راه پنجم** : از خاصیت تحت قائم استفاده میشود ، یعنی PN را مساوی پارامتر جدامیکنیم و MT را بر MN عمود مینمائیم ۲۰ ) از نقطه M خارج سهمی : بمرکز M وشعاع MF قوسی میزنیم تا هادی را در φ قطع کند عمودی که از M بر Fφ رسم شود جواب مسئله است . ۳ ) مماس بموازات امتداد △ : از F عمودی بر این امتداد فرود میآوریم تا هادی را در φ قطع کند ، عمود منصف Fφ مماس مطلوبست.

۴۸ -**قضیه** مکان نقاطی که از آنها بتوان دو مماس عمود برهم بر سهمی رسم کرد خط هادیست .

**نتیجه** ۱ ) خطی که بر نقاط تماس دو مماس متعامد بگذرد

بر کانون میگذرد ۲) قطعه‌ای از یك مماس متحرك محصور بین نقطه تماس وخط هادی از کانون بزاویه قائمه دیده میشود.

۴۹- **قضیه**- خطی که از محل تقاطع دو مماس موازی محور رسم شود بروسط خط واصل بین نقاط تماس میگذرد.

۵۰-**قضیه-پونسله** ۱) مماسهائیکه ازیك نقطه M بر سهمی رسم شوند باخطی که این نقطه‌را یکانون ربط میدهد وبا عمودیکه از M برهادی فرود میآید گوشه‌های مساوی میسازند۲) FM منصف گوشه بین شعاعهای حامل دو نقطه تماس است

۵۱ - **قضیه** - قسمتی ازمماس متحرك که بین دومماس ثابت محصور باشد ازکانون بگوشه ثابتی دیده میشود .

**نتیجه** - اگر سه‌مماس برسهمی یکدیگررادر M و N و P قطع کنند دایره MNP بر کانون سهمی میگذرد.

## شعاع حامل ، معادله ، مساحت سهمی .

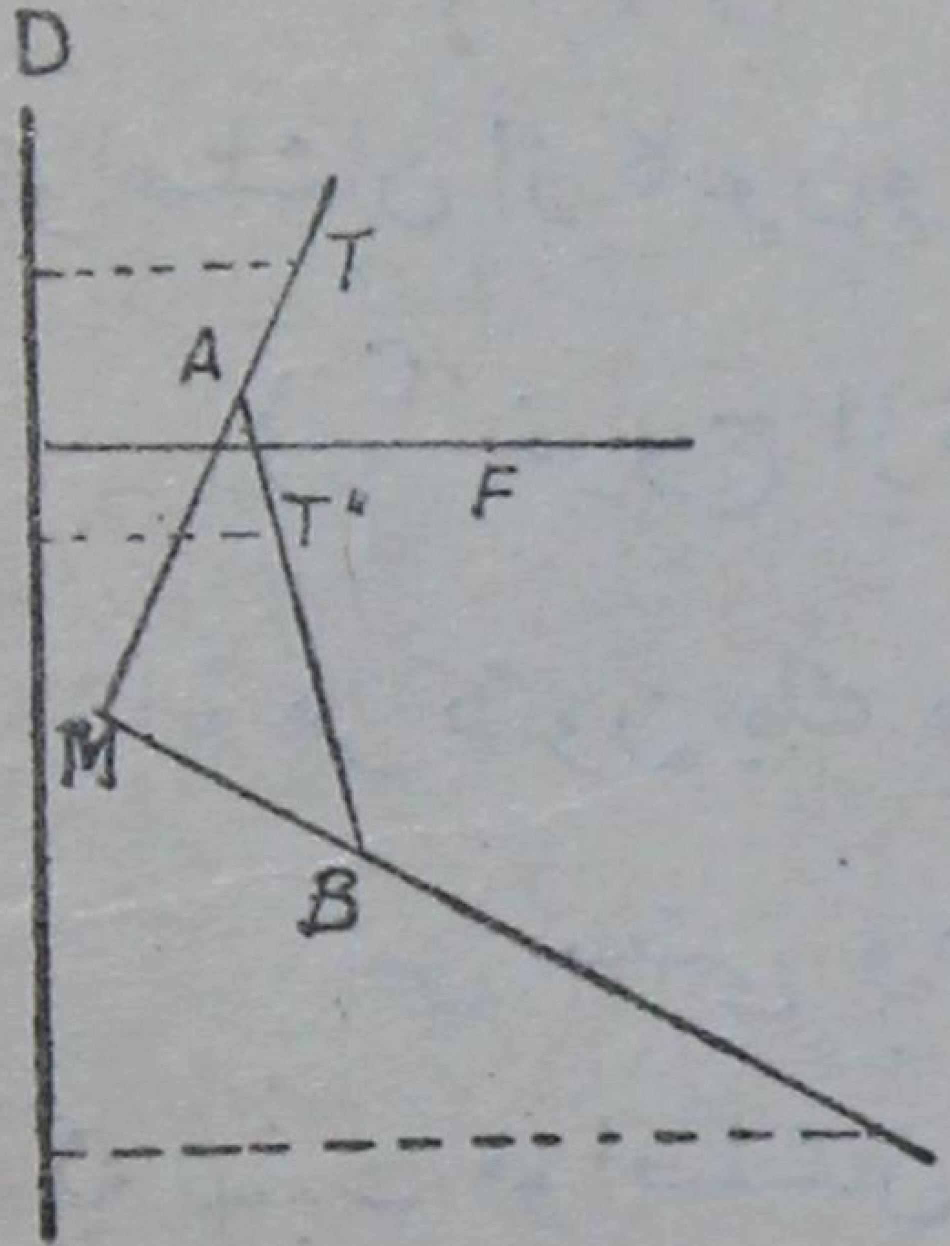
۵۲ - **قضیه** - هر گاه راس سهمی را مرکز مختصات، محور آنرا محور طولها و مماس بر راس را محور عرض ها فرض کنیم :

۱) شعاع حامل هر نقطهٔ بطول $x$ مساویست با $x+\frac{p}{2}$

۲) معادله سهمی عبارتست از $y^2 = 2px$

۵۳ — **قضیه** - سطح قسمتی ازسهمی محصور بین منحنی وعمودی که برمحوررسم شود $\frac{2}{3}$ سطح مستطیلی ست که

یك ضلع آن قسمتی ازعمود مرسوم بین دوشاخه منحنی وضلع دیگرش فاصله این عمود ازرأس سهمی باشد .



(ش۷)

**۵٤ - قضیه آپولونیوس-مماس** متحرك محدود بین دو مماس ثابت مماسهای ثابت را بنسبت عکس یکدیگر تقسیم میکنند • یعنی (ش ۷)

$$\frac{AM}{AT}=\frac{BT'}{BM}$$

عکس قضیه هم صحیح است .

## IV- خواص مشترك بیضی ، هذلولی وسهمی

### ۱ — کانون وهادی

**۵۵ — تعریف** - مکان هندسی نقاطی از صفحه را که نسبت فواصلشان از یك خط ثابت ، بنام **هادی** ، و یك نقطه ثابت ، بنام **کانون** ، مساوی مقدار ثابتی ، بنام **خروج از مرکز** باشد یك **منحنی دارای هادی** Courbe à directrice میگویند .

**۵٦ -قضیه — ۱)** بیضی مکان هندسی نقاطیست که نسبت c و a فواصلشان از کانون و هادی ثابتی ، ثابت و کوچکتر از ۱ میباشد .

۲ ) هذلولی مکان هندسی نقاطیست که نسبت c و a ،

فواصلشان از کانون و هادی ثابتی ، ثابت و بزرگتر از ۱ میباشد .

۳ ) سهمی مکان هندسی نقاطیست که نسبت c و a ، فواصلشان از کانون و هادی ثابتی مساوی ۱ میباشد .

($\frac{c}{a}$ خروج ازمرکز منحنی است . در بیضی و هذلولی بازاء هر کانون یك هادی وجوددارد که وابسته بآن کانون است)

پس بیضی وهذلولی وسهمی مکان هندسی نقاطی هستند که نسبت فواصلشان ازنقطه ثابتی و خط ثابتی مقداری است ثابت .

۵۷ — **قضیه** - منصف یکی اززاویه‌های حادث بین دو خط که کانون F را بدونقطه M و M' ازیك بیضی ، هذلولی یا سهمی وصل میکنند بر محل تلاقی M'M با هادی $\Delta$ میگذرد .

**نتیجه ۱** — قطعه‌ای ازمماس بر بیضی ،هذلولی یاسهمی محصور بین هادی و نقطه تماس از کانون بزاویه قائمه دیده میشود .

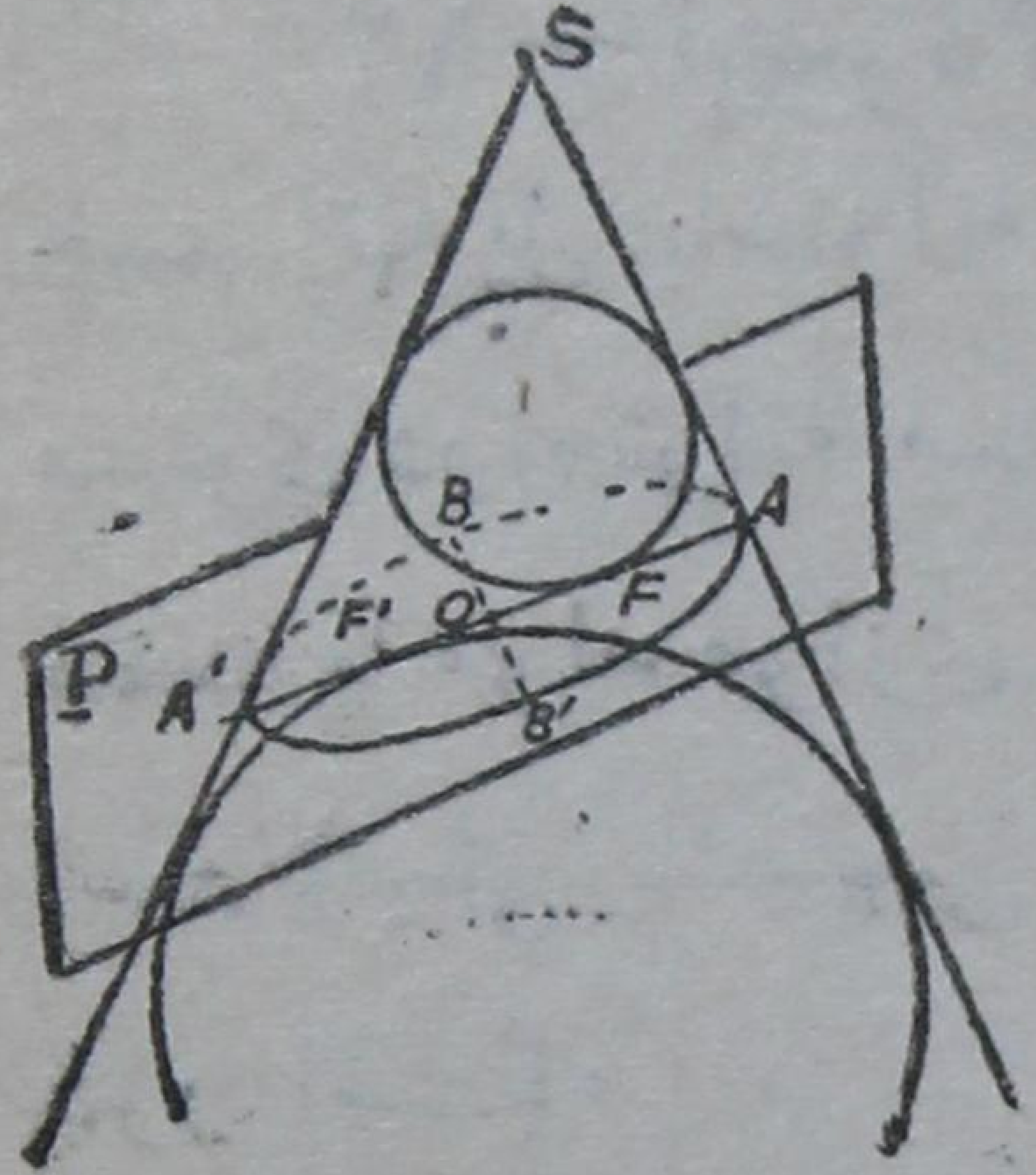
**نتیجه ۲** - اگر از یك نقطه P واقع برهادی دو مماس PT و PT' بر بیضی ،هذلولی یا سهمی رسم کنیم وتر TT' بر کانون میگذردو PF عموداست بر TT' .

۵۸ — **رسم مماس** — برای اینکه ازنقطه T واقع بر یکی ازمنحنیهای سه گانه مماسی برآن رسم کنیم کافیست از T به F وصل نمایم وعمودی بر FT بکشیم تا هادی را در P

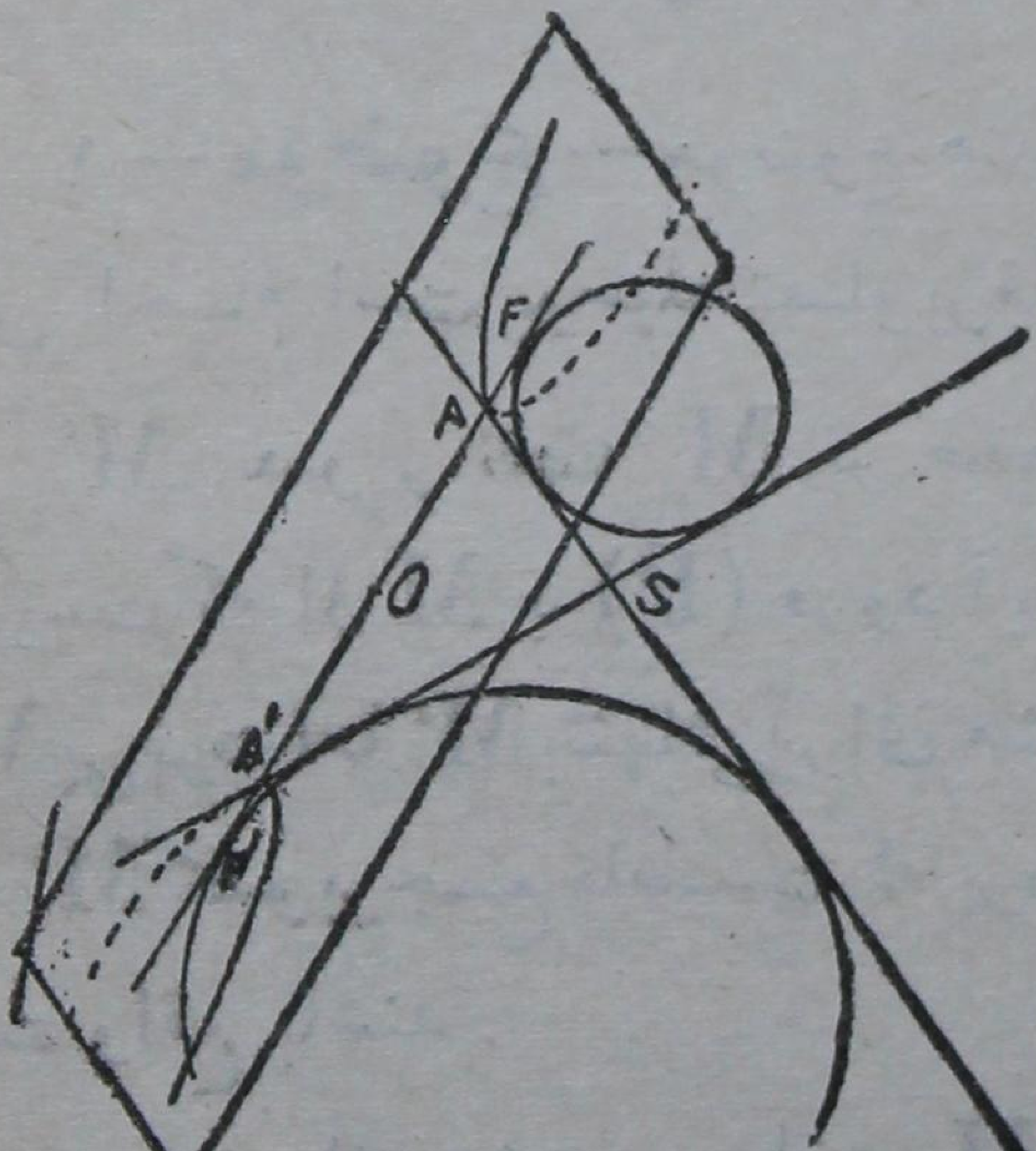
قطع کند. PT مماس مطلوبست.

## ۲- مقاطع مخروطی

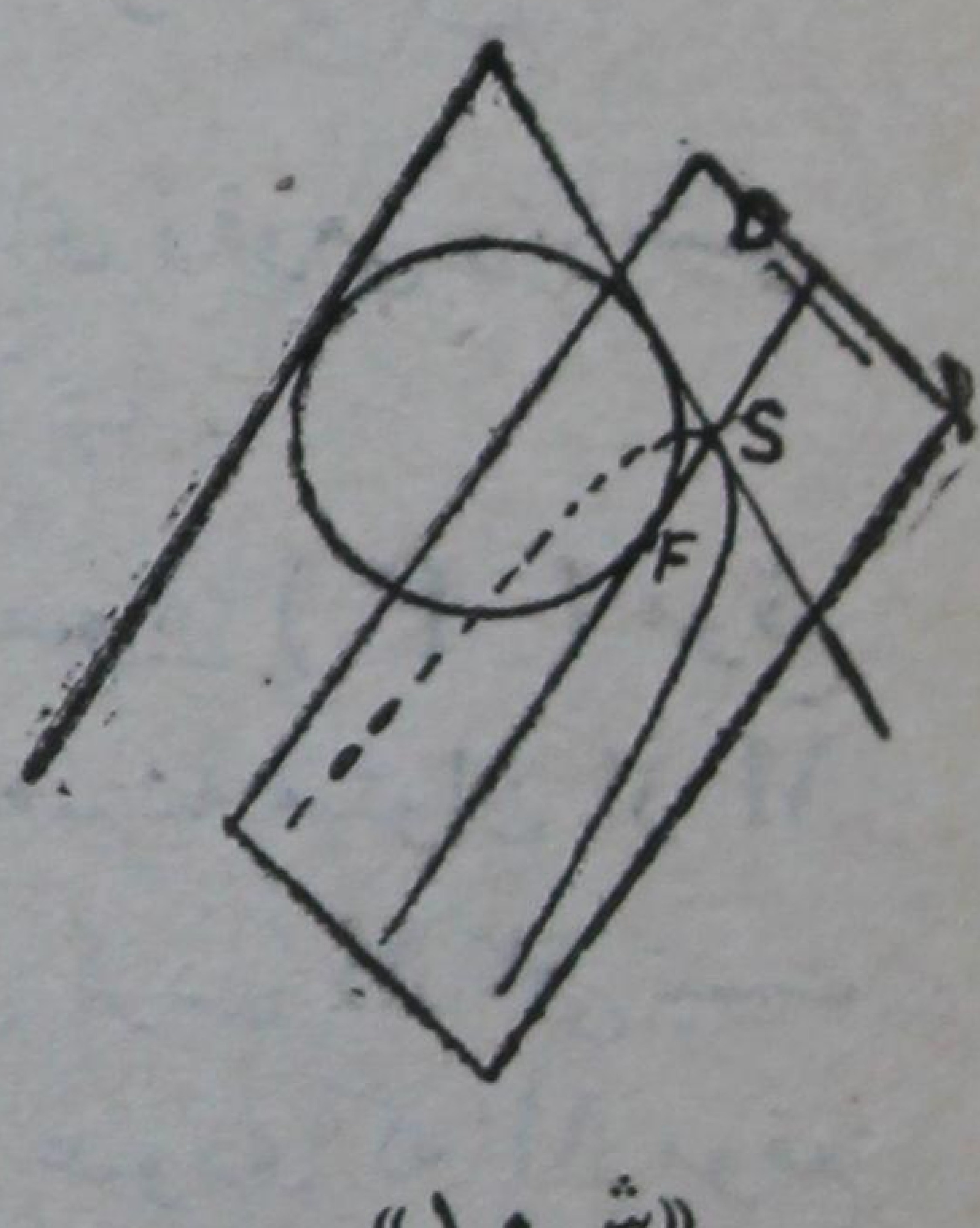
**۵۹- قضیه داندلن-** هرگاه صفحه‌ای مخروط مستدیری را قطع کند: ۱) اگر همهٔ مولدهای آنرا در یك طرف راس تلاقی کند مقطع یك بیضی است (ش ۸) ۲) اگر امتداد بعضی از مولدها را قطع نماید (دو دامنهٔ مخروط را قطع کند) مقطع هذلولی است (ش ۹) ۳) اگر صفحه موازی یك مولد باشد مقطع سهمی است (ش ۱۰)




(ش۸)




(ش۹)




«ش۱۰»

**۶۰- تبصره ۱-** اگر صفحه قاطع عمود بر محور مخروط مستدیر باشد مقطع دایره است.

**۶۱- تبصره ۲-** بمناسبت اینکه بیضی و هذلولی و سهمی

مقاطع صفحه درمخروط هستند آنها رامقاطع یا قطعات مخروطی یا بطورخلاصه مخروطات گویند بیضی را **قطع ناقص** ، هذلولی را **قطع زائد** و سهمی را **قطع مکافی** نیز مینامند.

٦٢ — **تبصره ٣٥** - اگر رأس مخروط بینهایت دور شود جسم تبدیل باستوانه مستدیر میگردد . پس مقطع صفحه مستوی دراستوانه مستدیر نیز بیضی است ، مگر وقتی که صفحه با مولد موازی باشد که دراینصورت مقطع دَوخط مستقیم است ( یعنی یك سهمی که پارامترش صفر و کانونش بی نهایت دور است ).

## هندسه رقومی و هندسه ترسیمی

١ — **موضوع** — موضوع هندسه‌های رقومی و ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله تصاویر قائم آنها .

M' تصویر نقطه M بر صفحه تصویر ( P ) موقع عمودیست که از M بر (P) فرود آید . همیشه میتوان از M به M' پی برد اما M' بتنهائی برای مشخص کردن M کافی نیست زیرا M' تصویر جمیع نقاطیست که برروی عمودی که M' موقع آنست واقع باشند .

پس برای مشخص ساختن M باید علاوه بر M' عامل دیگری دردست باشد .

این عامل ممکنست **رقوم** M یعنی فاصله M از صفحه مقایسه باشد ( موضوع هندسه رقومی ) یا تصویر دیگری از

M برصفحه دیگر ( موضوع هندسه ترسیمی )

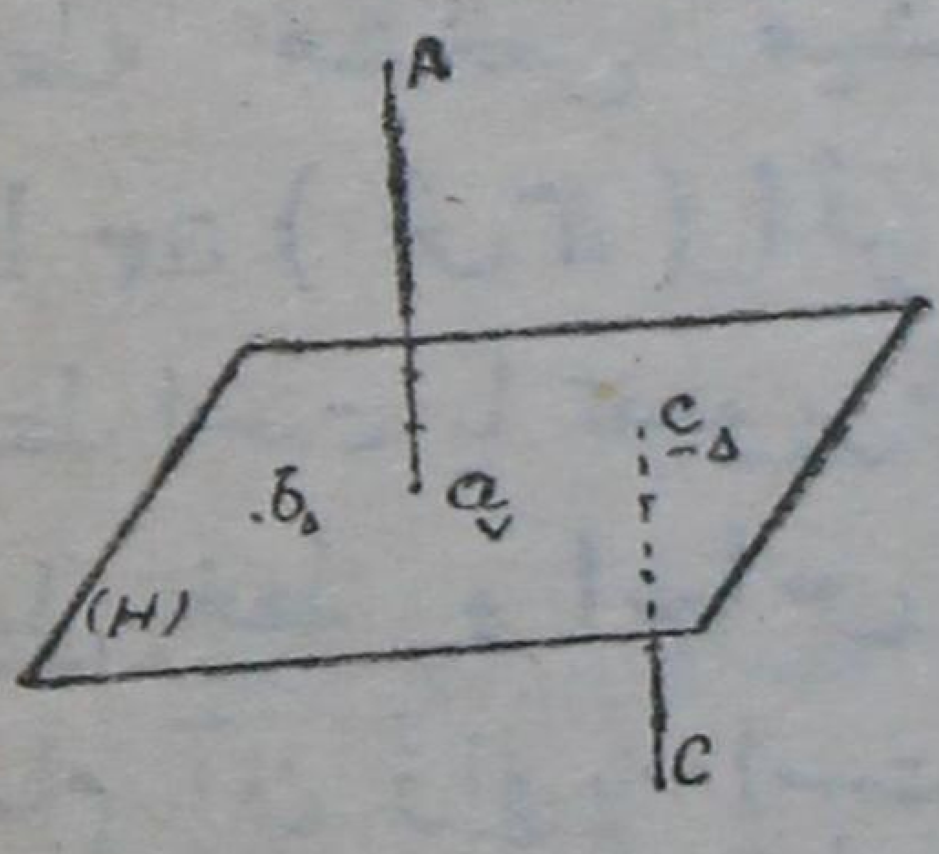
بنابراین موضوع هندسه رقومی نمایش اجسام است بوسیله تصاویرشان بریك صفحه وفاصله نقاط مختلفشان از این صفحه . موضوع هندسه ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله تصاویرشان بردوصفحه مشخص .

## ۱ ـ اصول هندسه رقومی

### I ـ نقطه

۲ -- نقطه بوسیله تصویروفاصله‌اش ازصفحه افق (صفحه مقایسه ) مشخص میشود . تصویر نقطه را با حروف لاتینی کوچك ورقوم آنرابشکل اندیس زیر آن نمایش میدهند مانند نقطه $a_7$ (ش۱) رقوم‌ها درصفحه مقایسه صفر، زیر آن منفی و بالای آن مثبت میباشند .

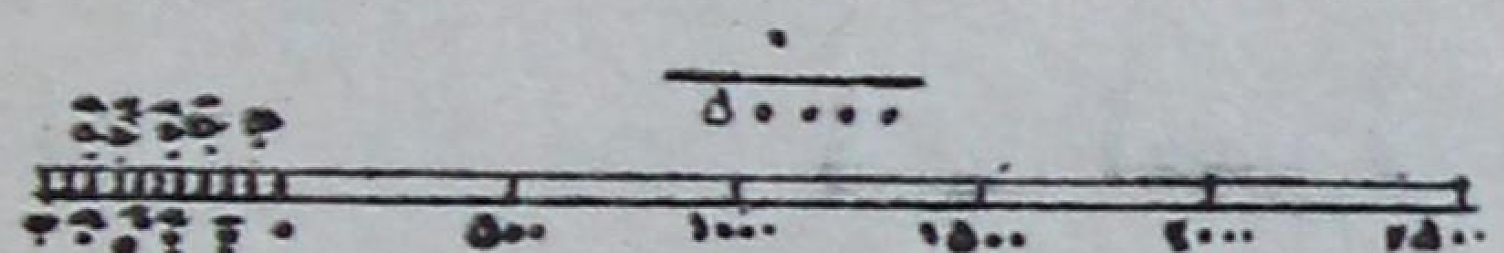
تصویر نقطه و رقوم آن را **ملخص** نقطه میگویند . ملخص هر شکلی شکلی است که از ملخصهای نقاط مختلف آن پدیدآمده باشد .




(ش۱)

**۳- مقیاس** — چون اجسام را با ابعاد حقیقی نمیتوان نمایش داد ناچار ابعاد آنها را ده ، صد ، هزار، .... مرتبه کوچك میکنند . **مقیاس** نسبت تصویر را بجسم نمایش میدهد . **مقیاس عددی**، بایك عدد بیان میکنند که ابعاد چند مرتبه کوچك شده‌اند ؛ مثال : $\frac{1}{1000}$ ، $\frac{1}{80000}$ .

**مقیاس خطی** عبارت ازخطی است که واحد طول‌را پس از کوچك کردن چند بار برآن نقل کرده‌اند و جزء اول سمت چپ آنرا که **پاشنه مقیاس** میگویند باجزاء کوچکتر تقسیم نموده‌اند (ش ۲)

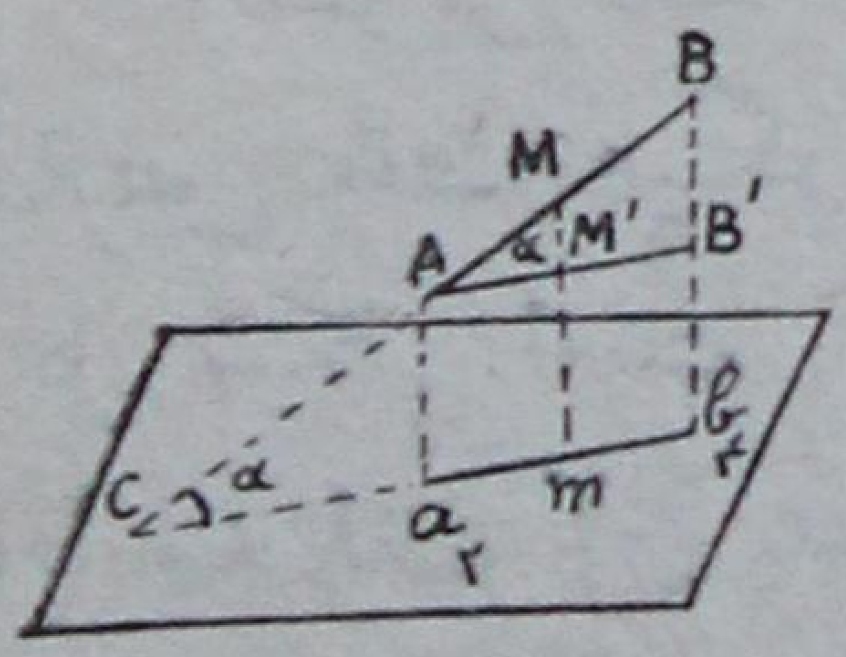


(ش۲)

شکل ۲ مقیاس خطی $\frac{۱}{۵۰۰۰۰}$ را نمایش میدهد که درآن‌هر سانتیمتر معرف ۵۰۰ متر است. برای تعیین فاصله دو نقطه‌درروی نقشه باپرگار فاصله آنها را برروی‌مقیاس نقل نموده میخوانند.

## II ـ خط مستقیم

٤ — تصویر خط مستقیم خط مستقیم است وبوسیله دو نقطه مشخص میشود مانند خط $a_2 b_4$ (ش۳) **اثر خط** فصل‌مشترك خط است با تصویرش. **شیب‌خط** ظل میل خط و **اساس** یا **فراز خط** ظل تمام آن زاویه است:



(ش۳)

$$\text{شیب} = tg\,\alpha = \frac{BB'}{AB'} = \frac{MM'}{AM'} = \frac{۱}{am}$$

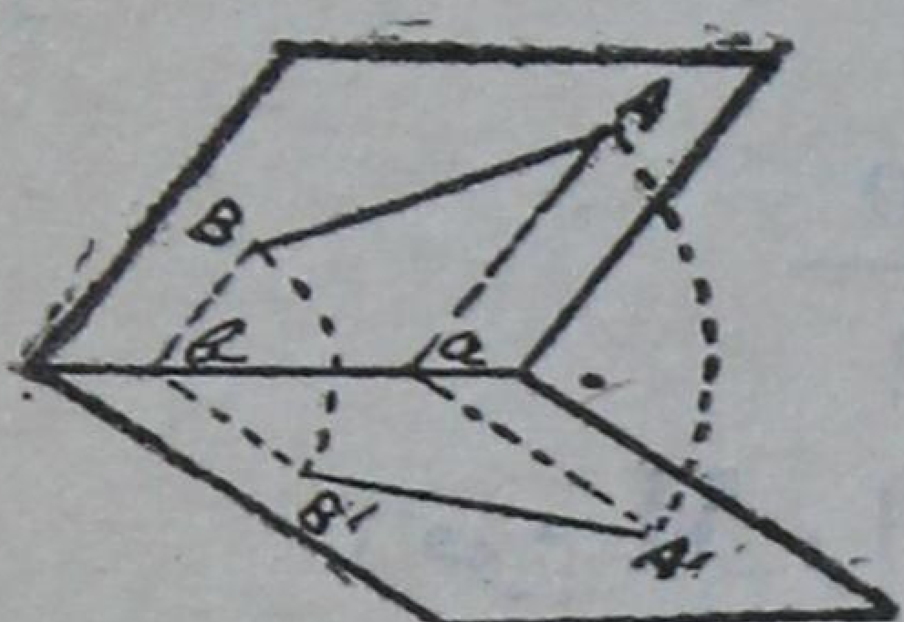
$$\text{اساس} = Cotg\alpha = \frac{BA}{BB'} = \frac{AM'}{MM'} = am$$

پس **اساس خط** فاصله تصاویر دونقطه از خط است که اختلاف رقومشان ۱ باشد و شیب عکس اساس میباشد.

خطی را که نقاط صحیح‌الرقوم بفاصله اساس بر آن معین شده باشد **مدرج** گویند.

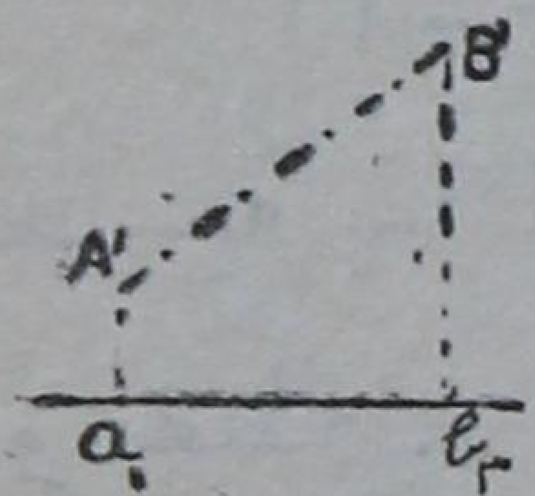
۵ — **خط افقی** همه جا دارای یك رقوم است. تصویر **خط قائم** یك نقطه است.

۶ — **تسطیح صفحه قائم بر افق** یعنی صفحه قائم را حول یك خط افقی بنام لولا باندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم تا موازی صفحهٔ افق شود. اگر رقوم لولا صفر باشد صفحه قائم بعد از دوران بر صفحهٔ افق منطبق میشود (ش۴) هر نقطه مانند A از صفحه قائم بوضع A' در میآید و A'a مساوی رقوم نقطه وعمود بر لولا است.



(ش۴)

پس برای تسطیح خطی کافیست از دو نقطهٔ آن (ش۵) دوعمود بر تصویر خط اخراج کنیم ومساوی رقوم آن نقاط برعمود ها جدا نمائیم و نقاطی را که بدست میآیند بهم وصل کنیم.

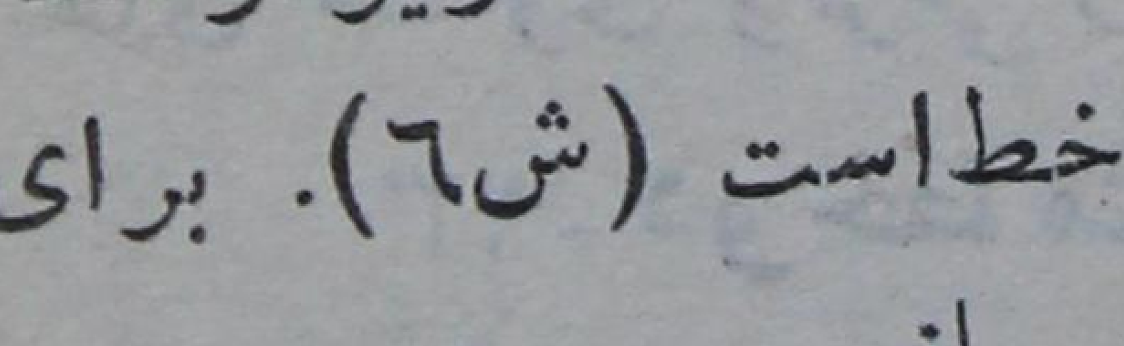


(ش ۵

۷ — عکس عمل تسطیح را ترفیع مینامند.

۸ — **تعیین شیب و اساس خط** — فاصله تصاویر دو نقطه که اختلاف رقومشان ۱ باشد اساس خط است (ش۶). برای بدست آوردن شیب عکس اساس را میسازیم.

۹ — **تعیین رقوم نقطه‌ای از خط** — ۱) بکمك تسطیح: تسطیح نقطه را بر تسطیح خط بدست میآوریم




(ش۶)

و M'm را که مساوی رقوم آنست اندازه میگیریم.

۲) با محاسبه :

$$\frac{M'M'}{BB'} = \frac{A'M'}{A'B'} = \frac{am}{ab}$$

یا



(ش۷)

$$\frac{\text{رقوم } M - \text{رقوم } A}{\text{رقوم } B - \text{رقوم } A} = \frac{am}{ab}$$

رقوم M را که مجهولست بدست میآورند (ش۷).

عکس مسئله هم بدوراه مذکور قابل حل است.

۱۰ — **تعیین زاویه خط باصفحه مقایسه** — ۱) بکمك تسطیح ۲) بکمك محاسبه با استفاده ازشیب یا اساس

۱۱ - **فاصله دونقطه** - ۱) بکمك تسطیح ۲) بکمك محاسبه با استفاده از طول تصویر و اختلاف رقوم های دو نقطه.

## وضع دو خط

۱۲ - **دوخط موازی** - دارای تصاویر موازی، اساس‌های مساوی وترقی رقوم دریك جهت هستند.

۱۳ - **دوخط متقاطع** - تصاویرشان متقاطعندو نقطه تقاطع درروی هردو تصویر یك رقوم دارد.

هرگاه تصاویر دوخط ab و cd یکدیگررا در خارج حدود شکل قطع کنند دوخط ca و bd را رسم میکنیم، اگر این دوخط متوازی یا متقاطع باشند دوخط ab و cd متقاطعند.

وگرنه متنافرند.

رقوم نقطه تقاطع بامحاسبه بدست میآید. بهتر اینست که چهار نقطه دوبدو متحدالرقوم دوخط رابهم وصل کنیم ، اگر دوخطواصل موازی شوند دوخط مفروض متقاطع خواهند بود.

## III - صفحه

۱۴ - صفحه با سه نقطه یا دو خط متوازی یامتقاطع مشخص میشود.

۱۵ - **صفحه افقی** همه‌جا یك رقوم‌دارد. تصویر **صفحه قائم** یك خط است (اثر صفحه).

۱۶ - **افقیه‌**های صفحه مقاطع آنند با صفحات موازی با افق. بس همه بسا یکدیگر موازیند. برای رسم یك افقیه کافیست دو نقطه متحدالرقوم ازصفحه را بهم وصل کنیم.

۱۷ - **خط بزرگترین شیب** صفحه آن است که بسا تصویرش بزرگترین زاویه‌ای را بسازد که خطوط صفحه با تصاویرشان میسازند.



(ش ۸)

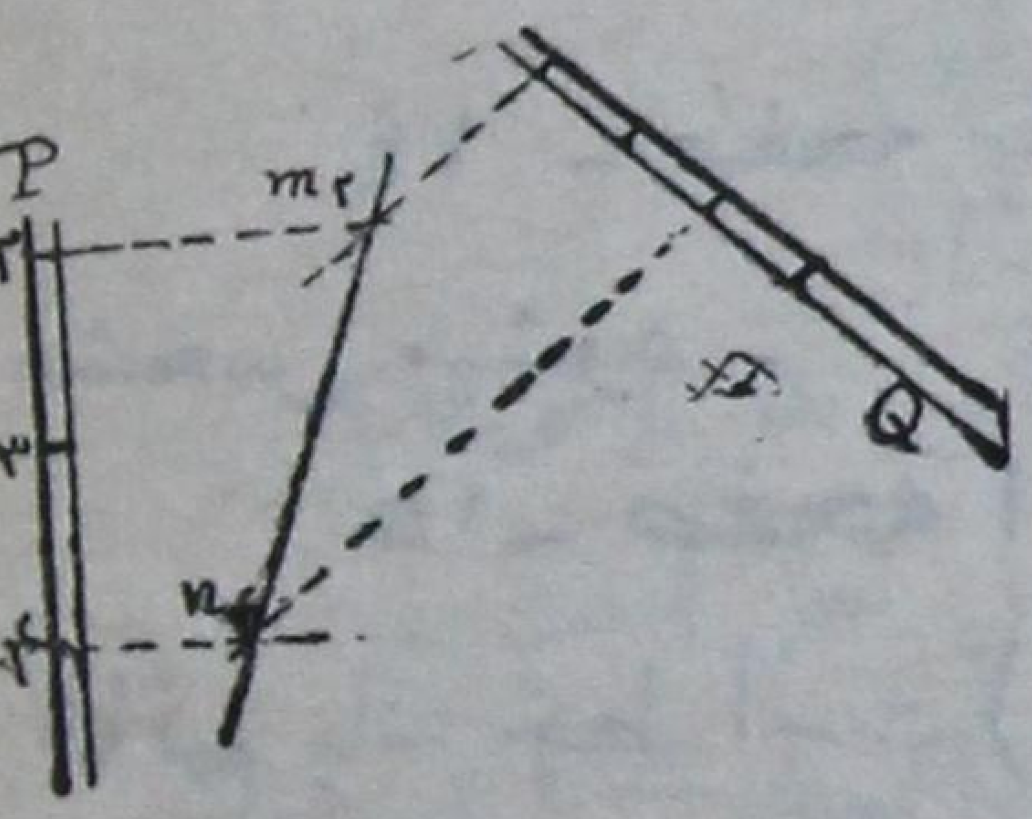
خط بزرگترین شیب صفحه عمودست بر افقیه ها. پس تصویر آن هم بر تصاویر افقیه هسا عمودست.

خط بزرگترین شیب بتنهائی برای نمسایش دادن صفحه کافیست (زیرا امتداد افقیه ها را بدست میدهد). پس برای نمایش صفحه خط بزرگترین شیب آنرا که مدرج شده باشد بدوخط موازی نمایش میدهیم (ش۸). این خطرا **مقیاس شیب** صفحه میگویند؛

۱۸- **توازی خط و صفحه** - خط وقتی با صفحه موازیست که با یکی از خطهای آن متوازی باشد.

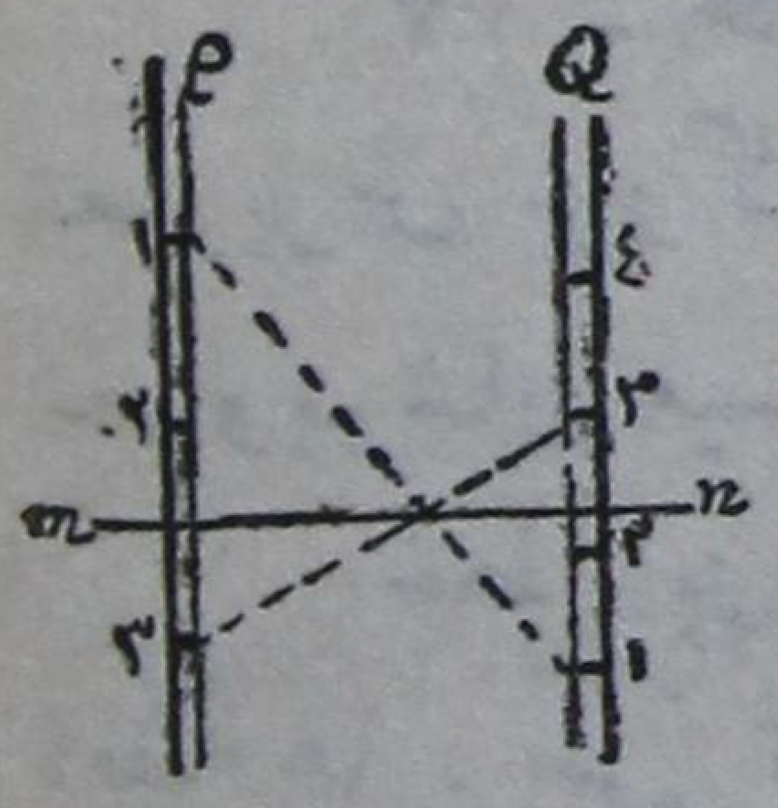
۱۹ - **توازی دو صفحه** - دو صفحه وقتی متوازیند که دو خط متقاطع یکی با دو خط از دیگری موازی باشند. برای موازی بودن دو صفحه کافیست مقیاس شیب های آنها متوازی باشند.

۲۰- **تقاطع صفحات** - برای پیدا کردن فصل مشترك دو صفحه چهار افقیه دو بدو هم رقوم آن ها را امتداد میدهیم تا همدیگر را در نقطهٔ m و n قطع کنند $m_2\ n_4$ فصل مشترك دو صفحه است (ش۹)

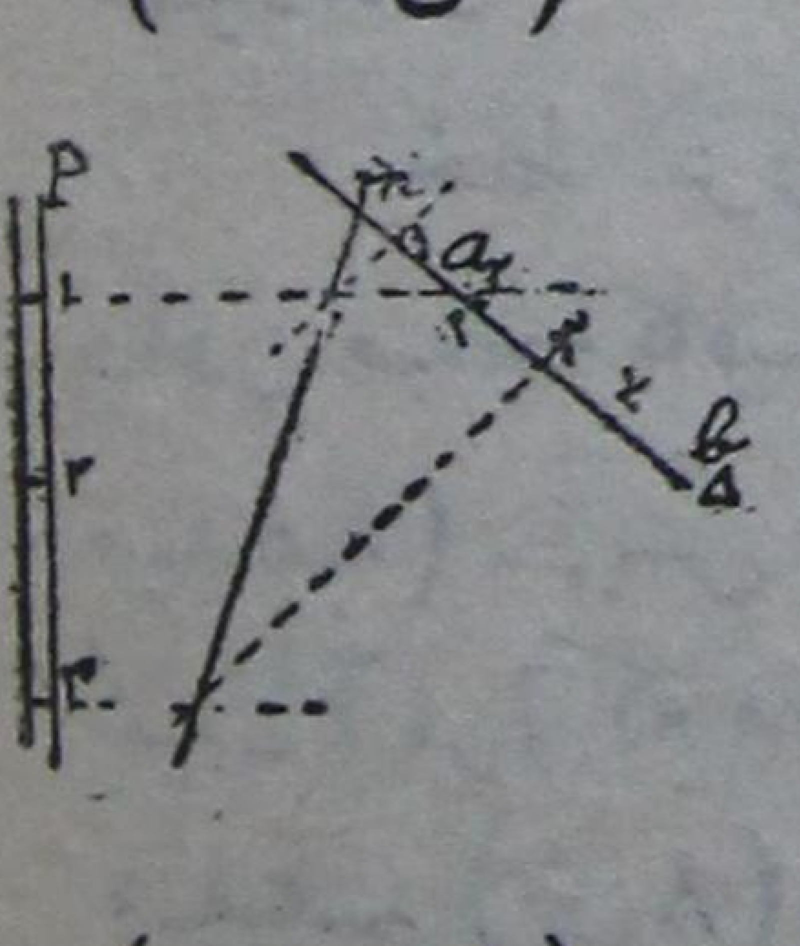

(ش۹)

هر گاه تصاویر مقیاس شیب های دو صفحه موازی باشند چهار نقطه دو بدو متحدالرقوم آنها را بهم وصل میکنیم تا یکدیگر را در a تلاقی کنند.

اقفیه ای که بر a بگذرد فصل مشترك مطلوب است (ش۱۰)

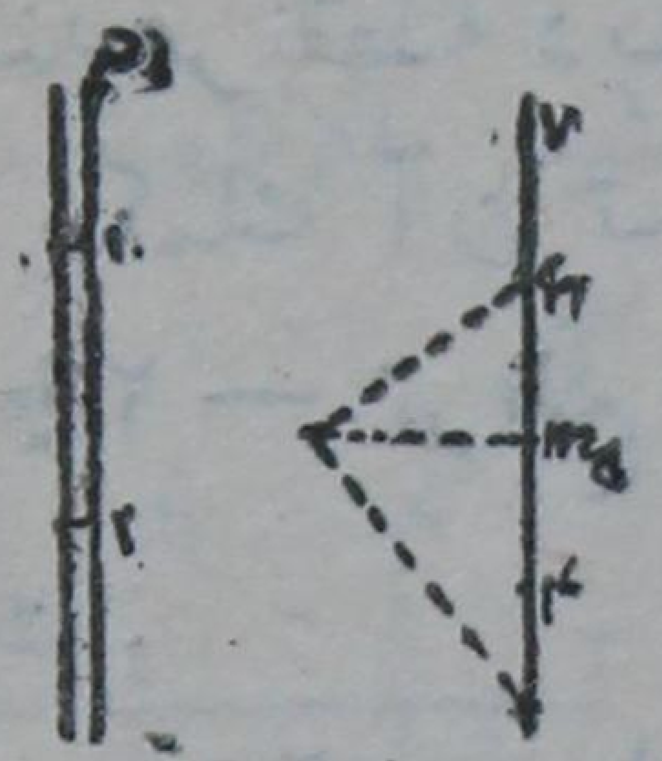

(ش ۱۰)

۲۱-**تقاطع خط و صفحه** - برای بدست آوردن فصل خط مشترك $a_2\ b_5$ و صفحه P (ش۱۱) بر خط یك صفحه اختیاری مرور میدهیم و بکمك افقیه‌های ۱ و ۳ آن فصل مشترك کش را با صفحه P بدست میآوریم. این فصل مشترك خط ab را در m قطع میکند. m محل تلاقی ab با صفحه P است.


(ش ۱۱)

۲۲ - **خط عمود بر صفحه** -

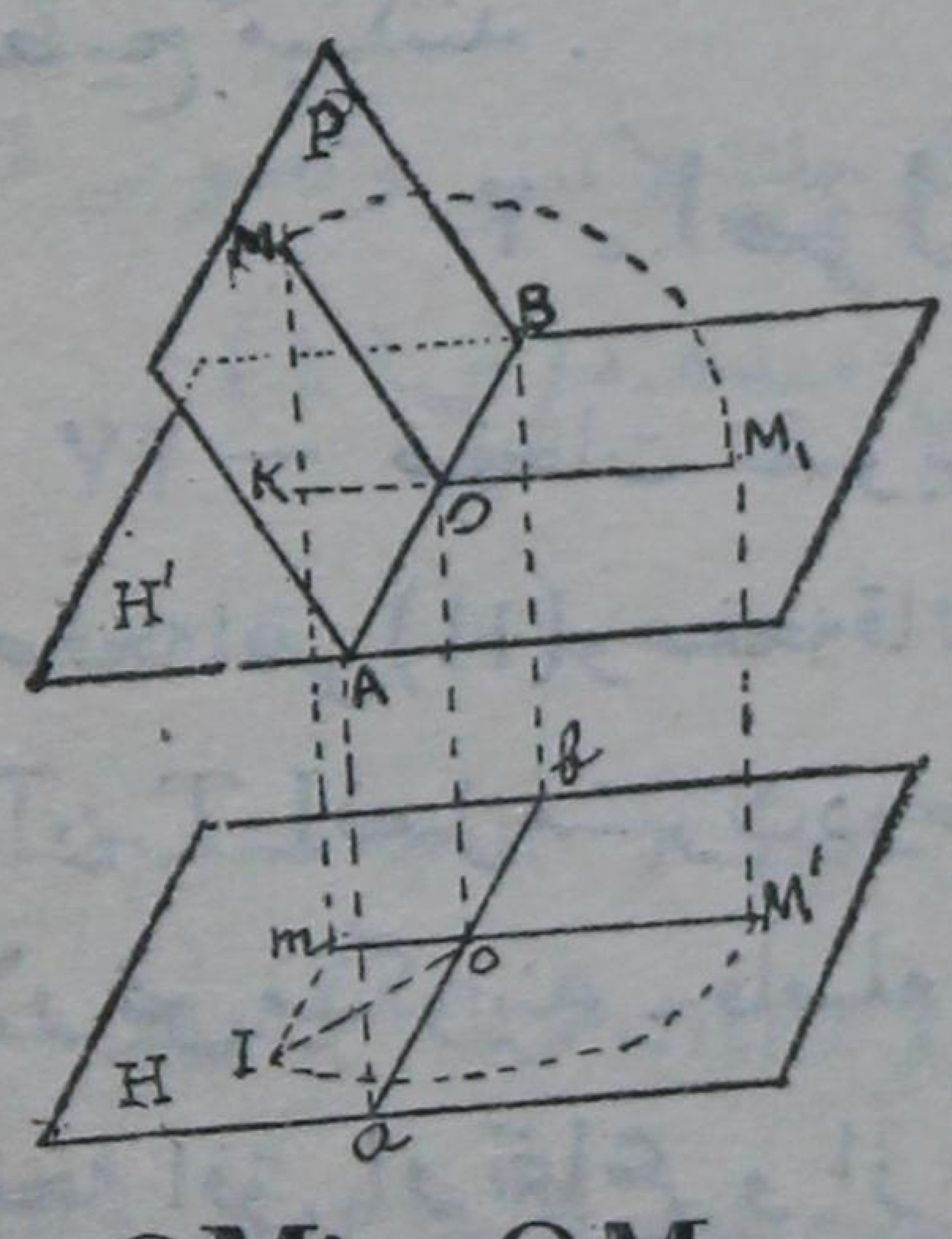
قضیه - اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد تصویرش موازی مقیاس شیب صفحه، شیبش عکس شیب آن و ترقی رقومش در جهت عکس ترقی رقوم آن میباشد. مانند خط ab و صفحه P (ش۱۲)



(ش۱۲)

## IV - تسطیح

۲۳ - تسطیح یک شکل مستوی عبارت از آنستکه صفحه شکل را حول یک خط افقی خود، بنام لولا، آنقدر دوران دهیم تا موازی صفحه افق شود.



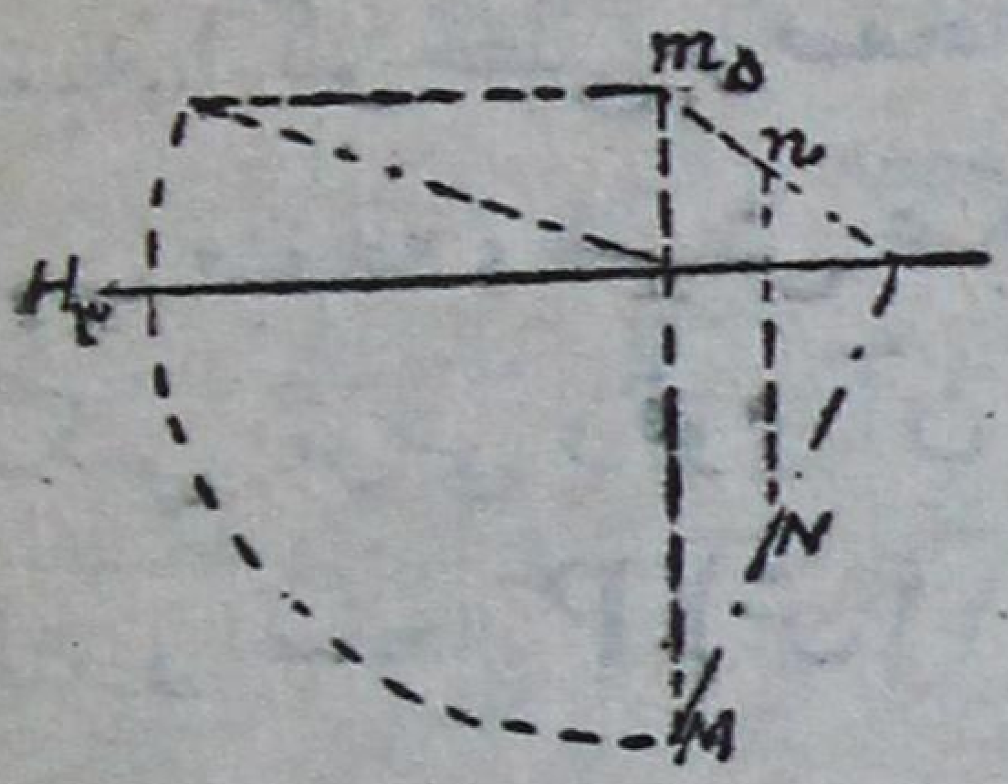

(ش۱۳)

اگر صفحه P حول افقیه رقوم ٤ AB دوران کند وضع یک نقطه M از آنرا در نظر میگیریم. m تصویر M است و بعد از دوران بوضع $M_1$ درمیآید (ش۱۳) که تصویر آن (یا باصطلاح تسطیح M) نقطه M′ است.

و ترسه برقائم OMK $OM' = OM_1 = OM = OMK$

بعلاوه OM′ موازی OM و عمود است بر ab پس تسطیح نقطه برروی عمودیست که از تصویر نقطه بر لولا فرود آید و فاصله آن از لولا مساوی وترسه بر قائمی است که یک ضلعش (KO) مساوی فاصله تصویر نقطه از لولا و ضلع دیگرش (KM) مساوی اختلاف ارتفاع نقطه و لولا باشد.

پس تسطیح نقطه $m_5$ در حول لولای $a_3$ $b_3$ نقطه M′ است (ش ١٤)




(ش ۱٤)

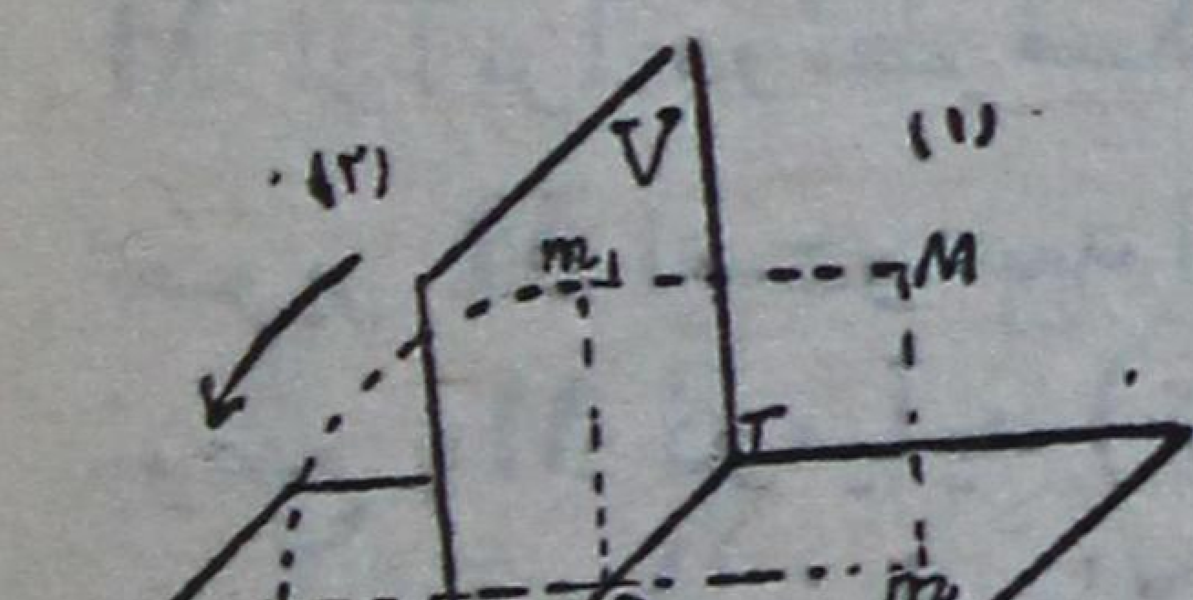
این قاعده را قاعده سه بـر قائم گویند .چون m وتسطیحش در دست باشندهر نقطه دیگر مانند n (ش۱٤) را بکمك آن تسطیح میکنیم .

۲٤ — ترفیع عکس عمل تسطیح است .

۲۵ — برای اینکه در روی شکلی ابعاد و زوایا بمقدار حقیقی معلوم شوند باید آنرا تسطیح کرد .

۲٦ — صفحه را عموماً حول یکی از افقیه های آن تسطیح میکنند .

## ۲ ـ اصول هندسه ترسیمی

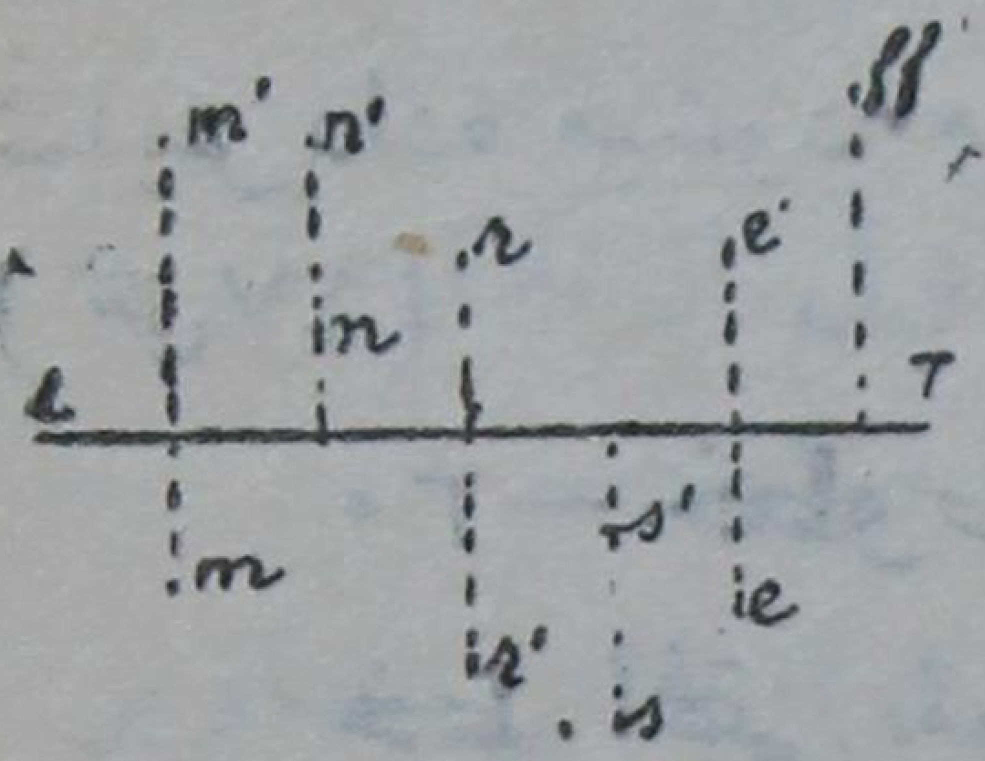



(ش ۱۵)

۲۷ — صفحات تصویر عبارتند از صفحه افقی (H) و صفحه قائم (V) عمود بر آن. LT فصل مشترك دو صفحه را **خط الارض** میگویند . فاصله نقطه m از صفحه افق **ارتفاع** و از صفحه قائم **بعد** نام دارد .

بالای صفحه افق ارتفاعات مثبت وزیر آن منفی و جلو صفحه قائم بعدها مثبت وعقب آن منفی میباشند همیشه وقتی بالای صفحه افق وروبروی صفحه قائم بایستیم در روی فصل مشترك دوصفحه (خط الارض ) L را طرف چپ و T را طرف راست مینویسیم (ش۱۵) واگراین ترتیب عوض شود جهت مثبت بعدها و ارتفاعها تغییر میکند . پس از اینکه نقطه M را بر

H و V تصویر کردیم V را در جهت مثلثاتی ۹۰ درجه دوران میدهیم تا بر افق منطبق شود و تصویر قائم نقطه بوضع m′ در آید . حال چون LT را روی صفحه کاغذ بکشیم بالای آن جای



ارتفاعهای مثبت و بعدهای منفی و زیر آن جای بعد های مثبت و ارتفاعهای منفی است .

تصاویر قائم و افقی هر نقطه بر روی یك رابط ( خط عمود بر LT ) واقعند .

(ش۱۶)

تصویر افقی را با حرف کوچك لاتینی و تصویر قائم را با همان حرف با علامت (′) نمایش میدهند(ش۱۶).

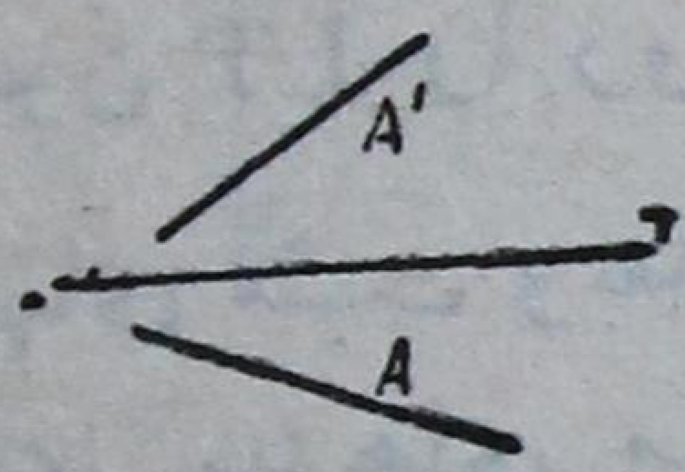
## ۱ ـ نقطه

۲۸ — صفحات تصویر فضا را بچهار ناحیه تقسیم میکنند در ناحیه اول بعد و ارتفاع مثبت نقطه (mm′،ش۱۶) ، در دوم بعد منفی و ارتفاع مثبت( نقطه nn′)،در سوم بعد و ارتفاع منفی( نقطه rr′) و در چهارم بعد مثبت و ارتفاع منفی است( نقطه ss′).

نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی اول و سوم دارای بعد و ارتفاع مساوی و متحدالعلامه اند یعنی تصاویرشان نسبت به LT قرینه یکدیگرند( ee′ )،تصاویر نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی دوم و چهارم بر یکدیگر منطبقند، زیرا بعد و ارتفاعشان مساوی و مختلف العلامه میباشند ff′ .

## ۲ - خط مستقیم

**۲۹** — خط مستقیم بوسیله تصاویر قائم وافقی که بیک حرف بزرگ لاتینی خوانده میشوند نمایش داده میشود . مانند خط $AA'$ (ش ۱۷)




**۳۰ — خطوط مهم** عبارتند از :

**خط افقی** موازی صفحه افق ، تصویر قائمش موازی خط الارض است .

**خط جبهی** موازی صفحه قائم ، تصویر افقیش موازی خط الارض است.

**خط قائم** عمود برصفحه افق ، تصویر افقیش یك نقطه وتصویر قائمش عمود ست برخط الارض .

**خط منتصب** عمود بر صفحه قائم ، تصویر قائمش یك نقطه وتصویر افقیش عمود ست برخط الارض.

**خط نیمرخ** عمود بر خط الارض، تصاویرش بر امتداد یکدیگر عمود برخط الارضند .

**خط مواجه** موازی خط الارض ، تصاویرش هم موازی خط الارضند .

هرخط بوسیلهٔ تصاویرش مشخص میشود مگر نیمرخ که باید اقلا دو نقطه آن مشخص باشد .

برای حل مسائل مربوط بخط نیمرخ باید آنرا تسطیح کرد (رجوع شود بشماره ٦)

**۳۱ — نقاط مهم خط** عبارتند از :

**اثر افقی** که برای بدست آوردنش تصویرقائم خط را امتداد میدهیم تاخطالارض راقطع کند.

**اثر قائم** از برخورد تصویر افقی با خطالارض مشخص میشود.

**نقطه تلاقی خط و منصف فرجه اول** از تلاقی قرینه یکی ازتصاویر خط باتصویر دیگر مشخص میشود.

**نقطه تلاقی با منصف فرجه دوم** ازتلاقی تصاویر خط مشخص میشود.

۳۲ — **توازی دوخط** — تصاویر همنامشان متوازیند.

۳۳ — **تقاطع دوخط** — تصاویر همنامشان متقاطعندو دو نقطهٔ تقاطع بریك رابط واقعند.

برای تحقیق اینکه‌دوخط که تصاویرشان درخارج حدود شکل متقاطعند یکدیگرراقطع میکنندیانه دو نقطه یکی رابدو نقطه دیگری وصل‌میکنیم ، اگردوخط که باین طریق بدست میآیند متقاطع یامتوازی باشند دوخط مفروض هم متقاطعند.

۳٤ — توازی دونیمرخ نیز بنحوفوق تحقیق میشود.

**۳ — صفحه**

۳۵ — صفحه مانندهندسه، بادوخط متقاطع یامتوازی یاسه نقطه‌غیرواقع بریك‌استقامت یا یك خط و نقطه‌مشخص میشود.

۳٦ — **خطوط مهم صفحه** عبارتند از :

**اثر افقی**، که‌تصویر قائمش بر روی خطالارض است.

**اثر قائم**، « « افقیش « «

این دواثر یا با هم موازیند یا یکدیگر را درروی xy

قطع میکنند.

نمایش صفحه بوسیله آثار بهترین طریق نمایش آنست.

**افقیه ها** که تصاویر افقیشان موازی اثر افقی است.

**جبهیه ها»** » قائمشان » « قائم است.

**خط بزرگترین شیب نسبت بصفحه افق** که تصویر افقیش عمودست براثر افقی.

**خط بزرگترین شیب نسبت بصفحه قائم** که تصویر قائمش عمودست براثر قائم.

**۳۷ — صفحات مهم** عبارتند از :

**صفحه افقی** ، اثر افقی ندارد ، اثر قائمش موازی خط الارض است.

**صفحه جبهی** ، اثر قائم ندارد ، اثر افقیش موازی خط الارض است.

**صفحه قائم** ، اثر قائمش عمود بر خط الارض ( تصاویر افقی جمیع خطوط و نقاطش بر اثر افقی آن واقع میشوند )

**صفحه منتصب** ، اثر افقیش عمود بر خط الارض ( تصاویر قائم جمیع خطوط و نقاطش براثر قائم آن واقع میشوند )

**صفحه نیمرخ** ، آثارش بریك امتداد و عمودند بر خط الارض

**صفحه مواجه** ، موازی خط الارض و آثارش هم باآن موازی هستند

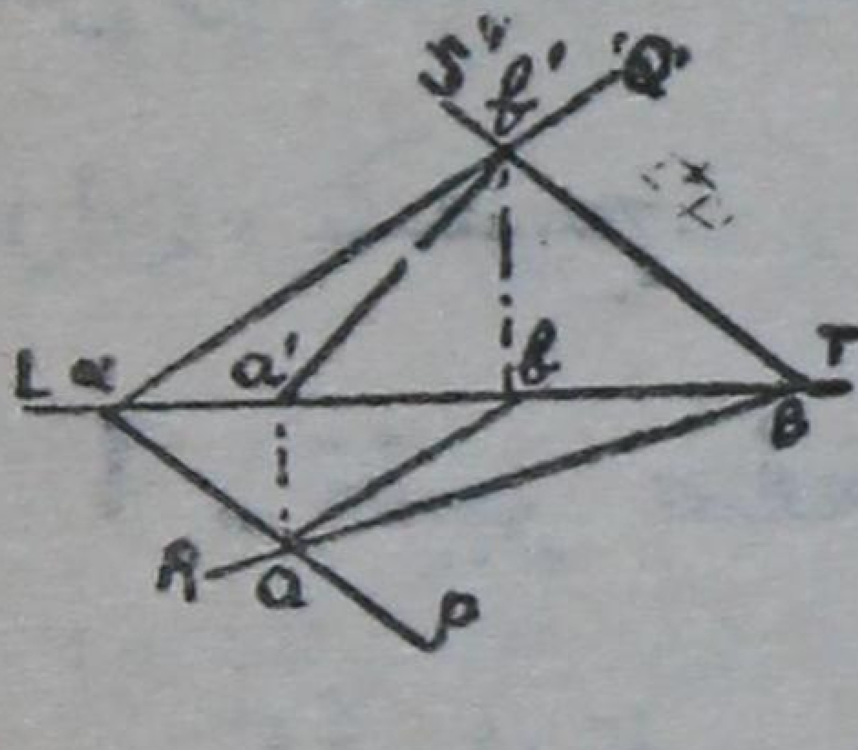
مسائل مربوط بصفحه نیمرخ بوسیله تسطیح صفحه حل میشوند.

**۳۸ — توازی خط و صفحه** — خط وقتی با صفحه موازی است که با یکی از خطوط آن موازی باشد.

**۳۹ — خط عمود بر صفحه** — تصویر افقیش عمود است بر اثر افقی و تصویر قائمش بر اثر قائم صفحه.

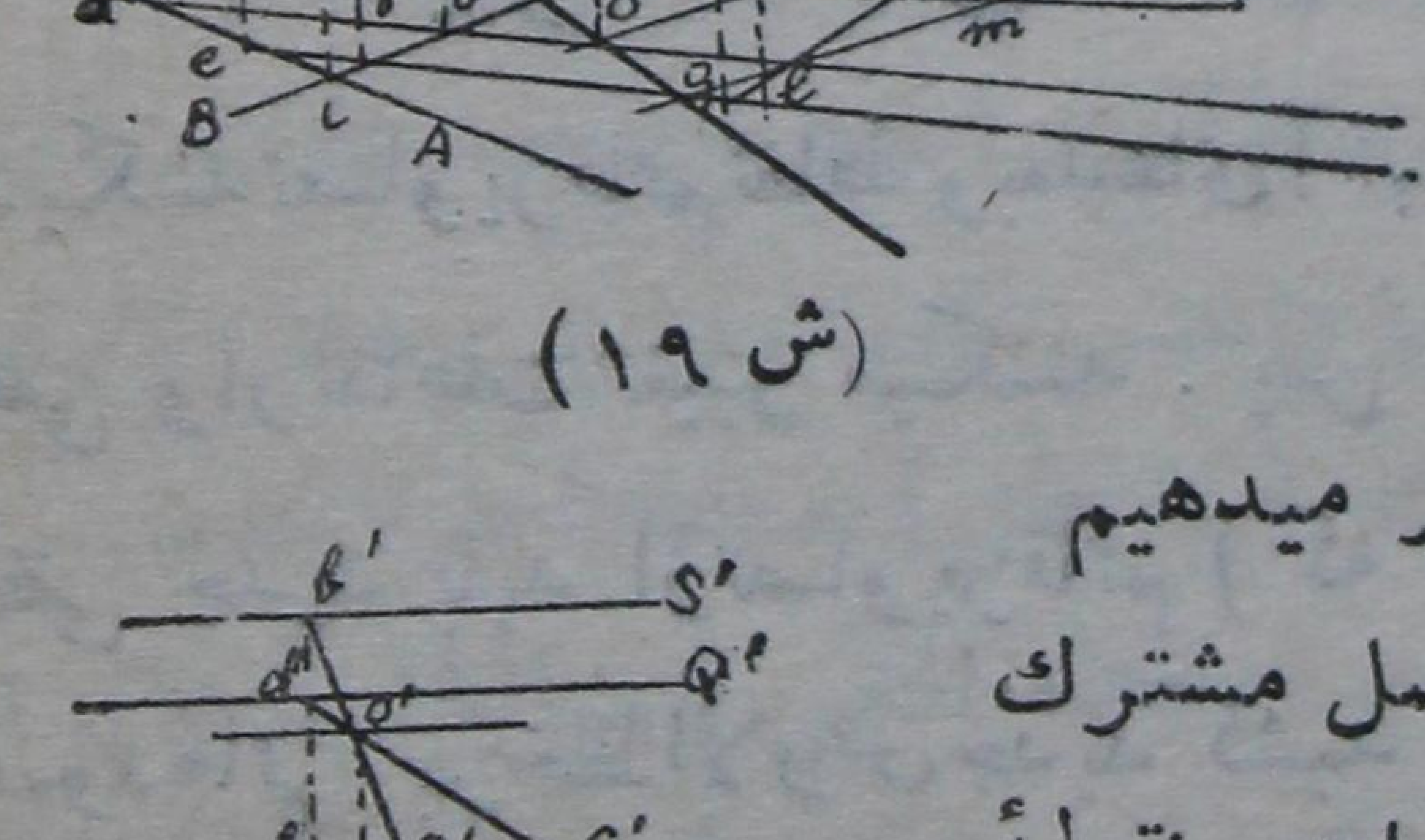
## ۴۰ — فصل مشترك دو صفحه

فصل مشترك دو صفحه را بوسیله رسم دو صفحه کمکی بدست میآورند بدینطریق که با هر صفحه کمکی یك نقطه از فصل مشترك را تعیین میکنند، صفحات کمکی بیشتر عبارتند از صفحات تصویر، صفحات قائم یا منتصب و افقی یا جبهی.



(ش ۱۸)

مثلا: فصل مشترك دو صفحه که با آثارشان نموده شده باشند (ش۱۸) بکمك صفحات تصویر - فصل مشترك دو صفحه که هریك بدو خط متقاطع نموده شده باشند(ش۱۹) بکمك دو صفحه افقی - فصل مشترك دو صفحه مواجه (ش۲۰) بکمك یك صفحه قائم.



(ش ۱۹)

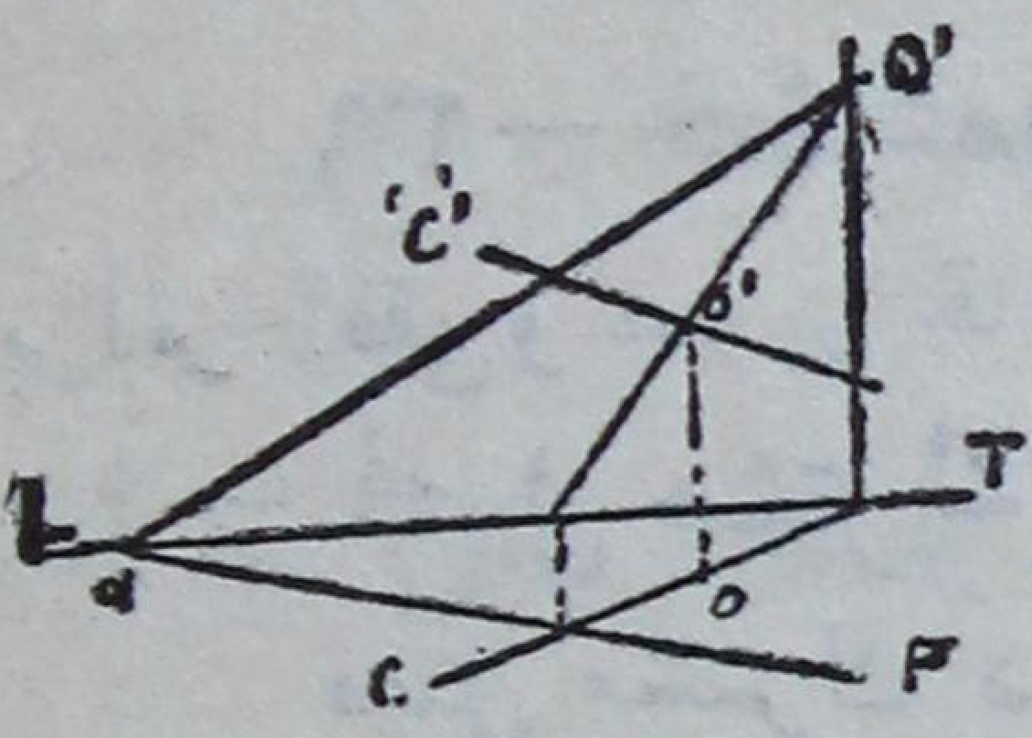
## ۴۱ — فصل مشترك خط و صفحه



(ش ۲۰)

بر خط یك صفحه فرعی مرور میدهیم (معمولا قائم یا منتصب)، فصل مشترك دو صفحه خط مفروض را در نقطهٔ OO' قطع میکند (ش۲۱)، این نقطه فصل مشترك خط و صفحه است.

## ٤ - تغییر مکانها

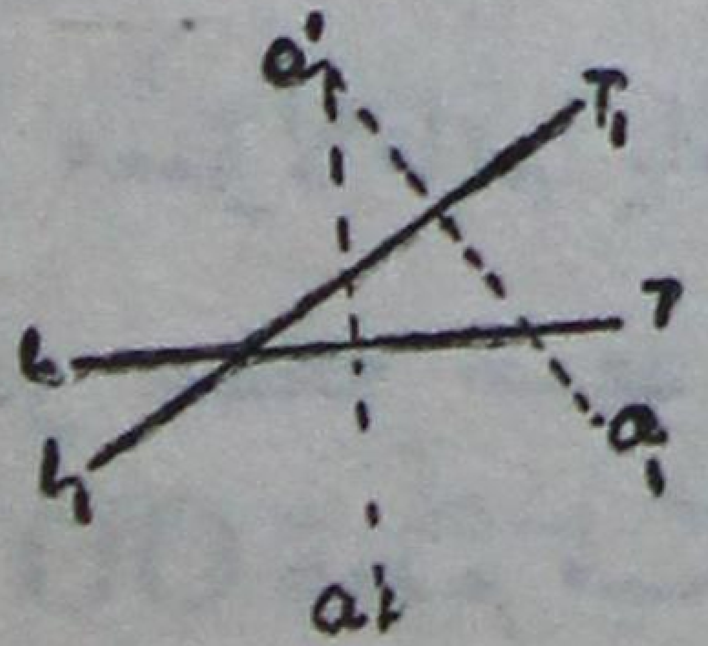

(ش۲۱)

٤۲ - مقصود از تغییر مکان دادن یک شکل مستوی اینست که آنرا با یک صفحه تصویر (یا یك صفحه تصویر موازی آن) قرار دهیم تا تصویر جدید شکل با خود آن مساوی شود و بتوانیم از روی آن خواص و ابعاد و زوایای شکل را مطالعه کنیم • تغییر مکانها بر سه قسمند : تغییر صفحه، دوران ، تسطیح.

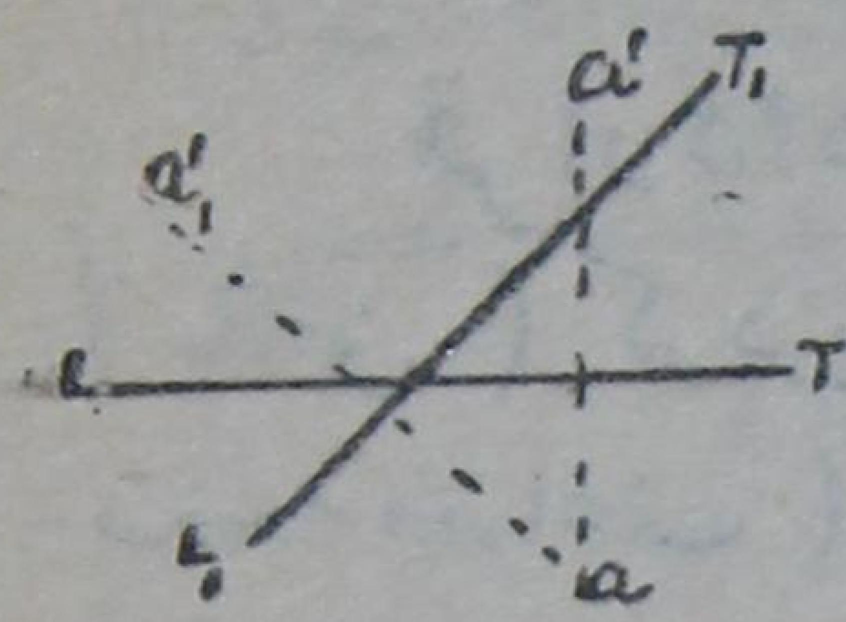
### ۱ - تغییر صفحه

٤۳ - در تغییر صفحه صفحه افقی یا قائم تصویر را موازی صفحه شکل قرار میدهیم و صفحهٔ دیگر ثابت میماند . هر تغییر صفحه بوسیله وضع جدید خط الارض مشخص میشود .

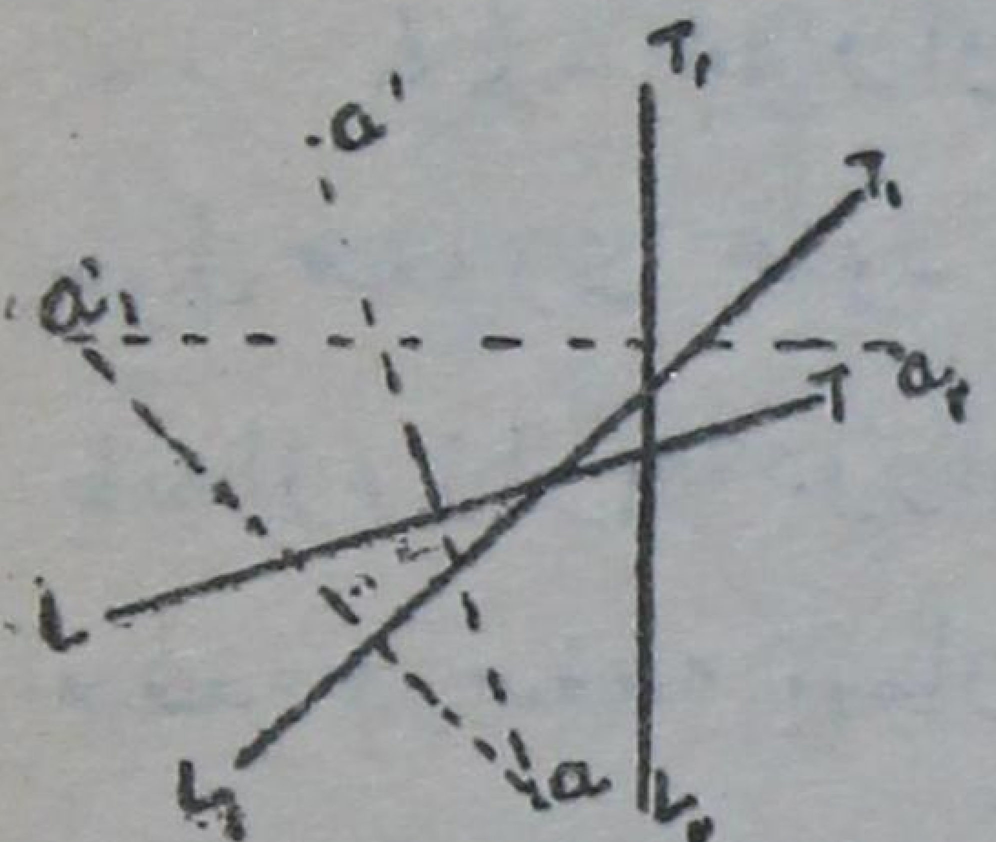
۱ - **تغییر صفحه افق** - در این تغییر چون صفحه قائم تغییر نمیکند تصاویر قائم نقاط و بعدهای آنها ثابت میمانند و فقط تصاویر افقی و ارتفاعات تغییر میکنند . پس برای بدست آوردن تصاویر افقی جدید باید از تصاویر قائم (که ثابتند) عمودهائی بر خط الارض جدید کشید و بر آنها ابعاد را (که ثابتند) جدا نمود (ش۲۲)


«ش ۲۲»

ب — **تغییر صفحه قائم** — در این تغییر صفحه تصاویر افقی و ارتفاعات ثابت میمانند



(ش۲۳)



(ش ۲٤ )

وتصاویر قائم وارتفاعات تغییر میکنند (ش۲۳)

پ — **تغییر صفحه مضاعف** — یعنی اول یکی ازصفحات تصویر و بعد صفحه دیگر را تغییرداد . این عمل ترکیب دو عمل سابق است. مثلا درشکل ۲٤ نخست صفحه افق و بعد صفحه قائم راتغییر میدهیم .

**توجه کنید !** — درموقع تغییر صفحه باید متوجه علامت بعدها و ارتفاعات و وضع خط الارض جدید بود یعنی اگر L طرف چپ خط الارض قرارداده شود بعد های مثبت زیر و ارتفاعات مثبت بالای آن واقع میشوند ، و اگر L را طرف راست بگذاریم عکس این ترتیب خواهد شد .

**٤٤ - صفحه افق ( یاقائم) راموازی خطی باید قرارداد** - خط افقی (یاجبهی )میشود، پس خط الارض جدید باید موازی تصویرقائم ( یا افقی) خط مفروض قرار داده شود .

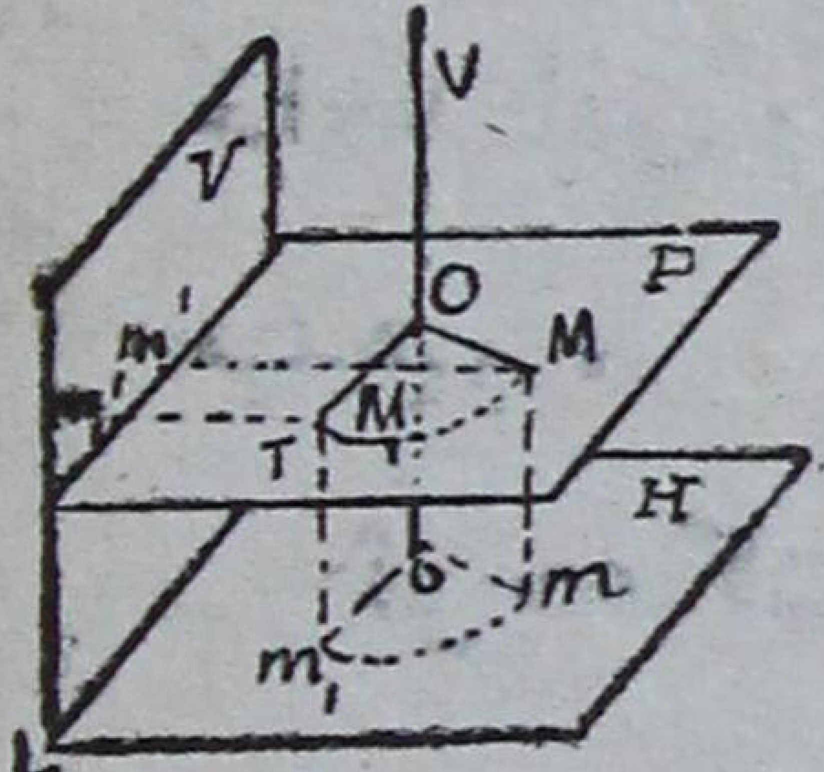
**٤٥ - صفحه افق (یاقائم) راعمود برصفحه ای باید قرارداد** - صفحه قائم (یا منتصب )میشود، پس خط الارض جدید باید عمود بر اثر قائم ( یا افقی ) صفحه اختیارشود .

**٤٦ - خطی راعمود برصفحه افقی (یاقائم) باید قرارداد** - نخست بایدخطرا موازی صفحه قائم (یاافق ) کرد بعد آنراعمود برصفحه افق (یاقائم) نمود (تغییر صفحهٔ مضاعف).

**۴۷ - صفحه‌ایرا عمود بر صفحه افق (یاقائم) باید قرارداد** - نخست باید صفحه‌را عمود برصفحه قائم ( یاافق ) کرد بعد موازی صفحه افق ( یاقائم ) نمود ( تغییر صفحه مضاعف ).

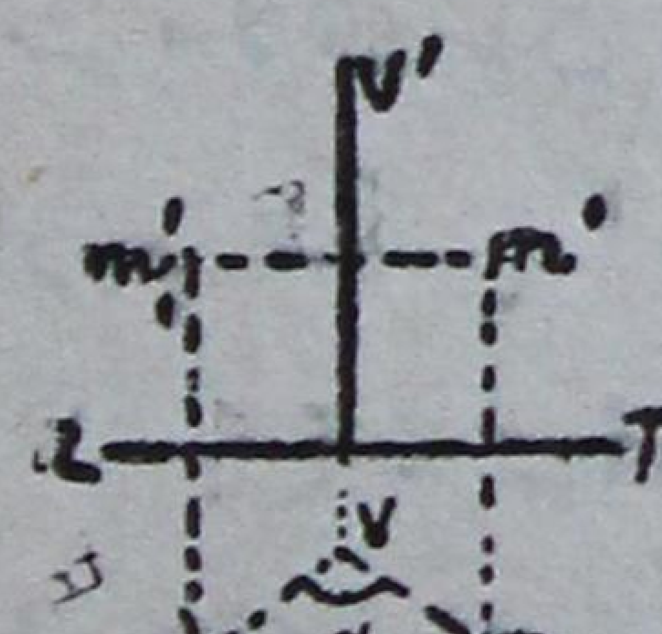
## ب - دوران

**۴۸ - دوران نقطه** - هرگاه نقطه‌ای حول محوری عمود بر یك صفحه (مثلاافق) باندازه زاویه αدوران کند تصویر آن برآن صفحه درصفحه بهمان اندازه دوران میکند و تصویرش بر صفحه دیگر(قائم )درروی خطی موازی خط‌الارض تغییر مکان میدهد(ش۲۵).



(ش۲۵)

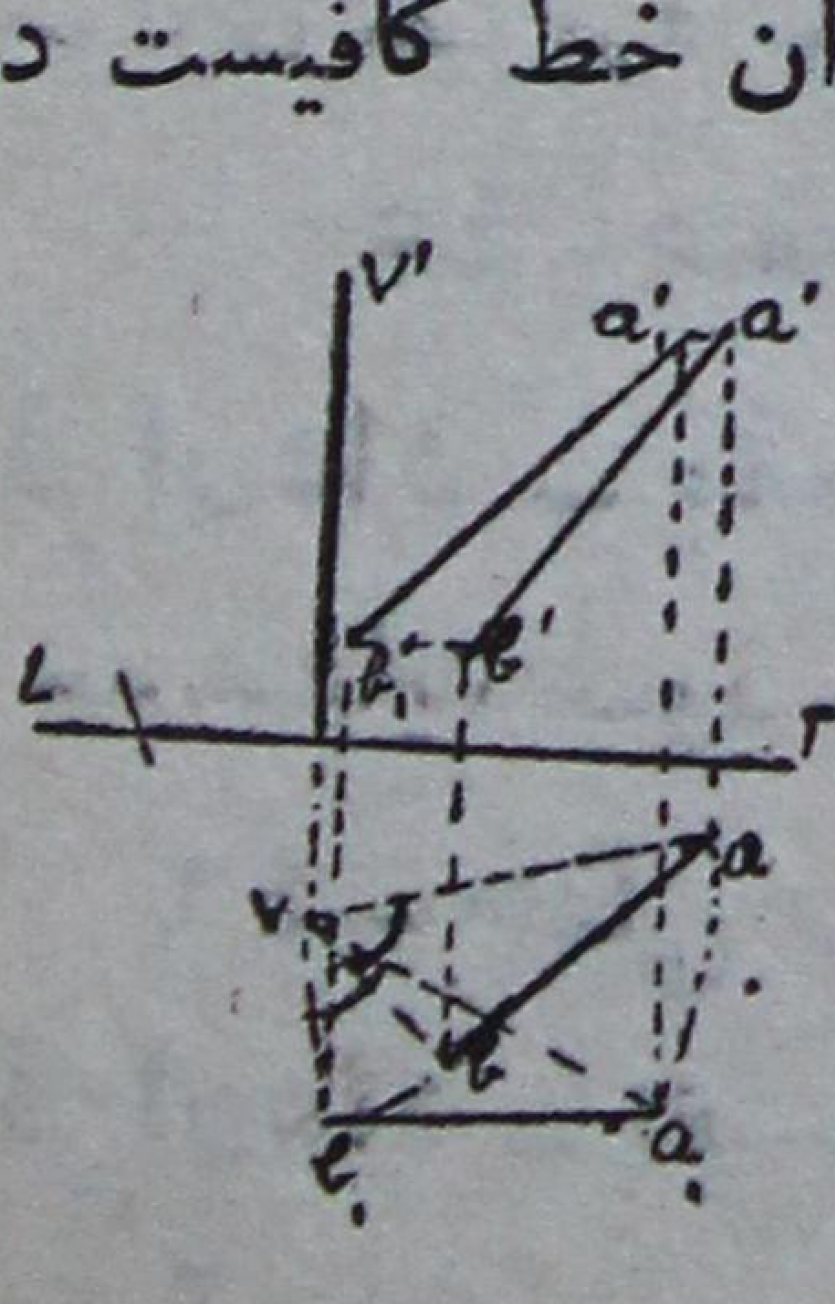
پس در **دوران نقطه حول محور قائم** تصویرافقی بمقدار حقیقی دوران میکندوتصویر قائم درروی خطی موازی LTحرکت مینماید ( ش ۲۶ ) و در **دوران حول محور منتصب** تصویر قائم بمقدارحقیقی دوران نموده تصویر افقی موازی خط‌الارض تغییر مکان میدهد .



(ش۲۶)

**۳۹ - دوران خط** - البته برای دوران خط کافیست دو نقطهٔ آنرا دوران داد (ش۲۷) .

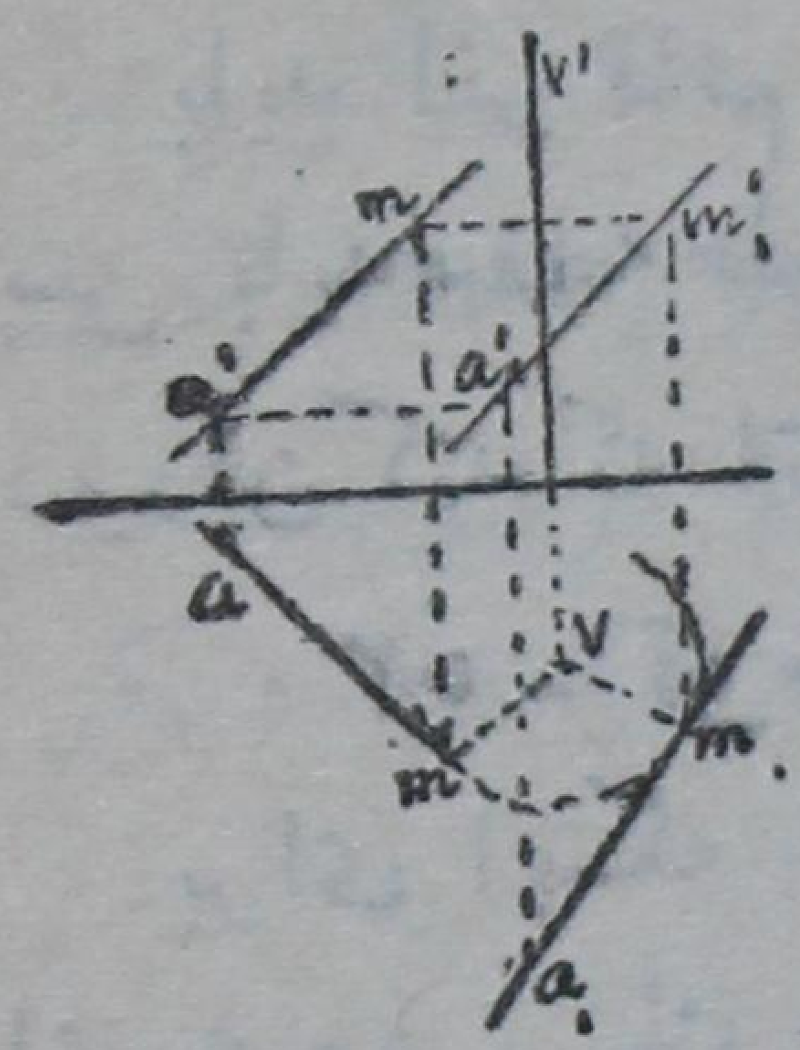
$a_1 b_1$ با abمساویست .



(ش۲۷)

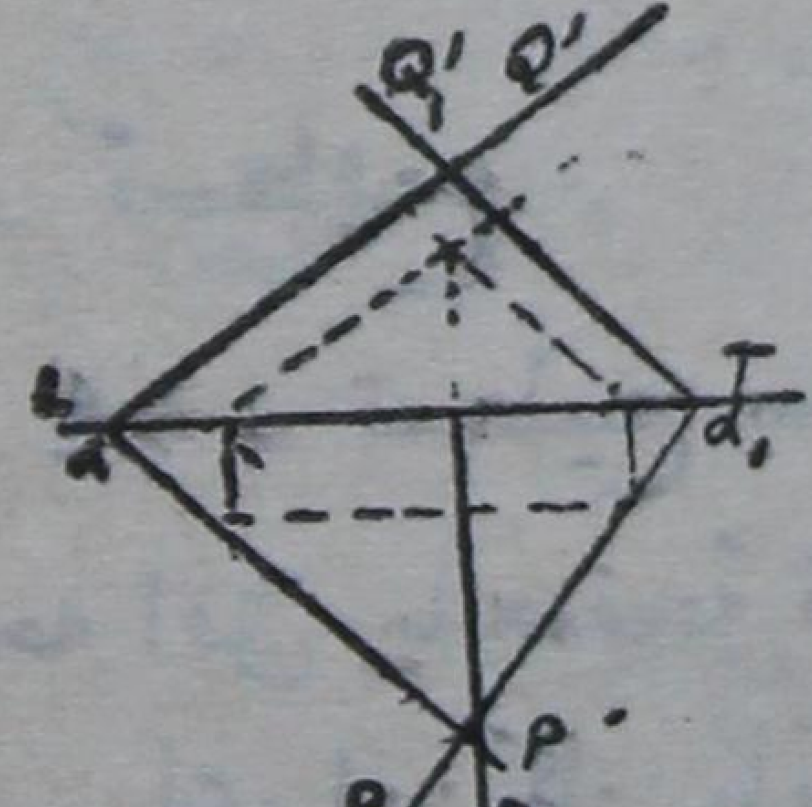
ر ه‌دیگر اینست که عمودمشترك محوروخط را رسم کنیم وموقع آن آنرا باندازهٔ زاویهٔ مطلوب دوران

دهیم ووضع جدید خطرا بوسیله رسم عمود بروضع جدیدعمود مشترك مشخص کنیم . آنگاه تصویر قائم را بوسیلهٔ تعیین اوضاع جدید تصاویر نقطهٔ دیگرمعین نمائیم (ش۲۸)

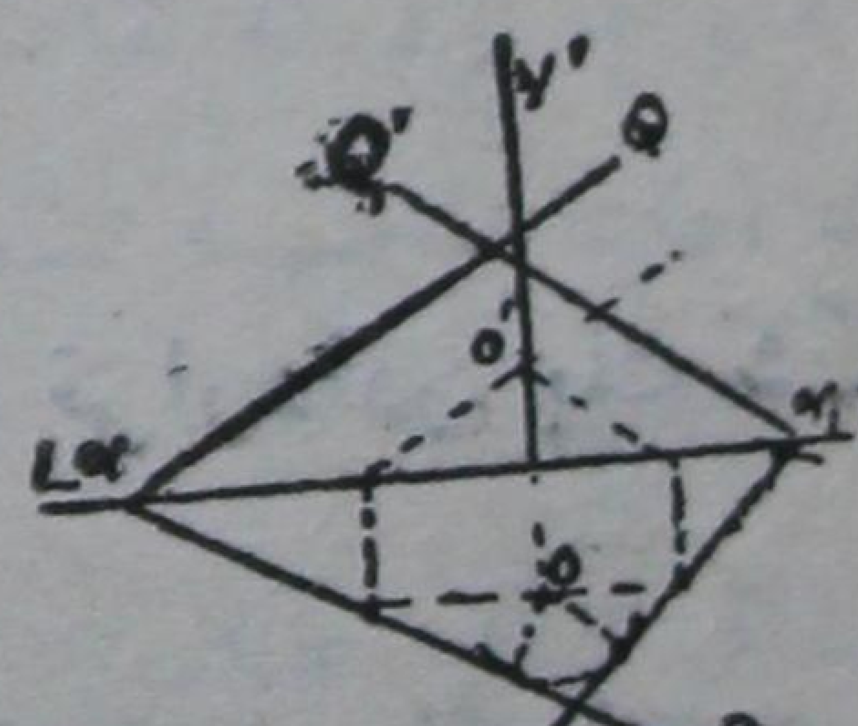


(ش۲۸)

**۵۰ - دوران صفحه** - باید يك نقطه ويك خط ازصفحه رادوران داد.ولی معمولا نقطه تلاقی محور با صفحه را که حین دوران ثابت میماند در نظر گرفته يك خط از صفحه را ( معمولا اثر قائم را اگرمحور قائم باشد و اثر قائم راا گر محور منتصب باشد) باندازه زاویه مطلوب دوران میدهیم . اگر یکی از آثار را دوران دهیم برای تعیین اثر جدید دیگر از امتداد جبهیه یا افقیه‌ای که برمحل تلاقی محور وصفحه میگذرد استفاده میکنیم (ش ۲۹ و ۳۰)



(ش۳۰)

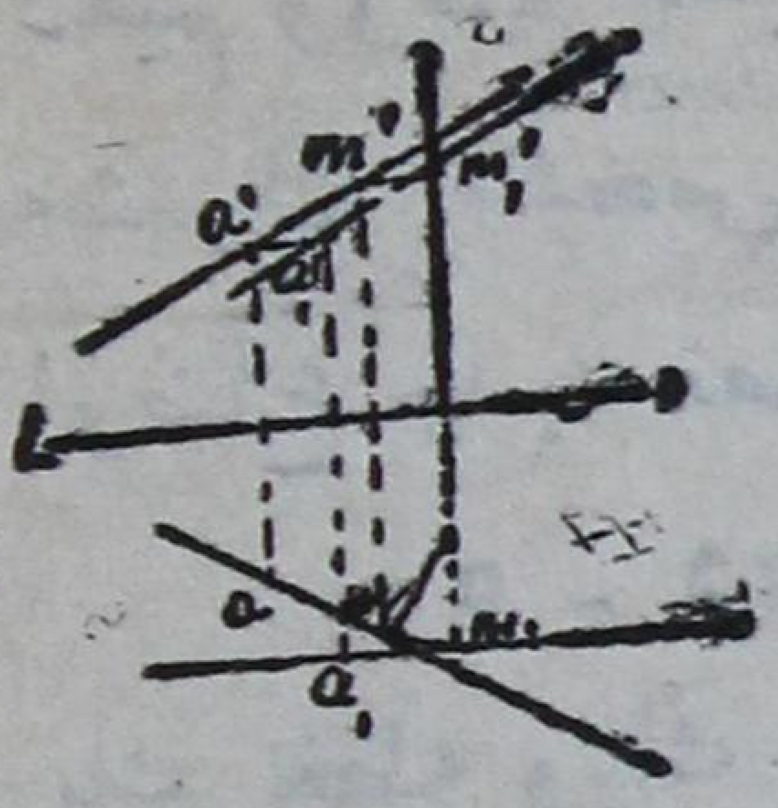


(ش۲۹)

**۵۱ ـ خطی را دوران دهید تا جبهیه شود**

باید تصویر افقی خط موازی خط‌الارض گردد . پس

باید خط را حول محورقائم دوران داد تا وقتی تصویرافقیش موازیLTشود(ش۳۱)

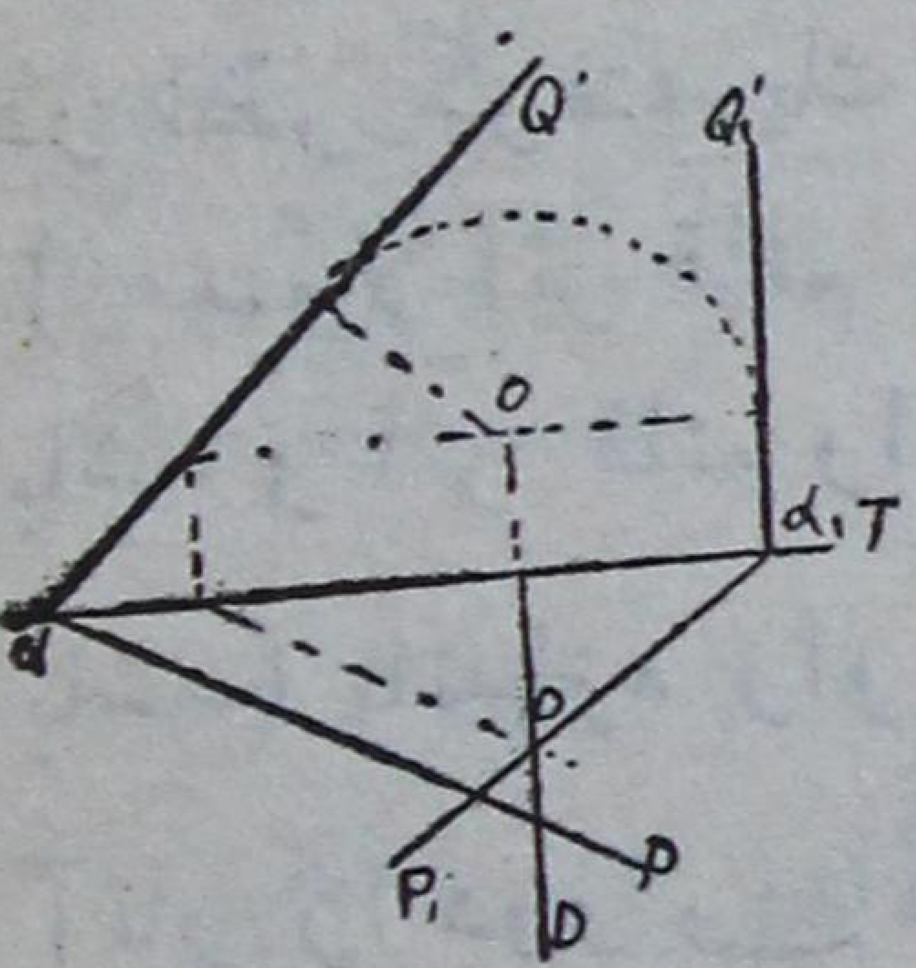


(ش ۳۱)

## ۵۲ - صفحه‌ای را دوران دهید تا قائم شود

باید اثر قائم برخط‌الارض عمود گردد . پس بایدصفحه طول محور منتصب آنقدر دوران کند که اثرقائمش بر LTعمودشود . (۳۲)

## ۵۳ - توجه کنید !



(ش ۳۲)

برای اینکه خطی موازی یاصفحه ای عمود بریك صفحه تصویرشود يك دوران یایك تغییر صفحه‌لازم‌است‌و برای اینکه خطی‌عمود یا صفحه‌ای موازی يك صفحه تصویر شود بایددودوران یادوتغییر صفحه دادیعنی اول خط را موازی يك صفحه تصویرو بعد عمود برصفحه دیگر نمودیااول صفحه‌راعمودبریك صفحه‌تصویرو بعد موازی باصفحه‌دیگر کرد .

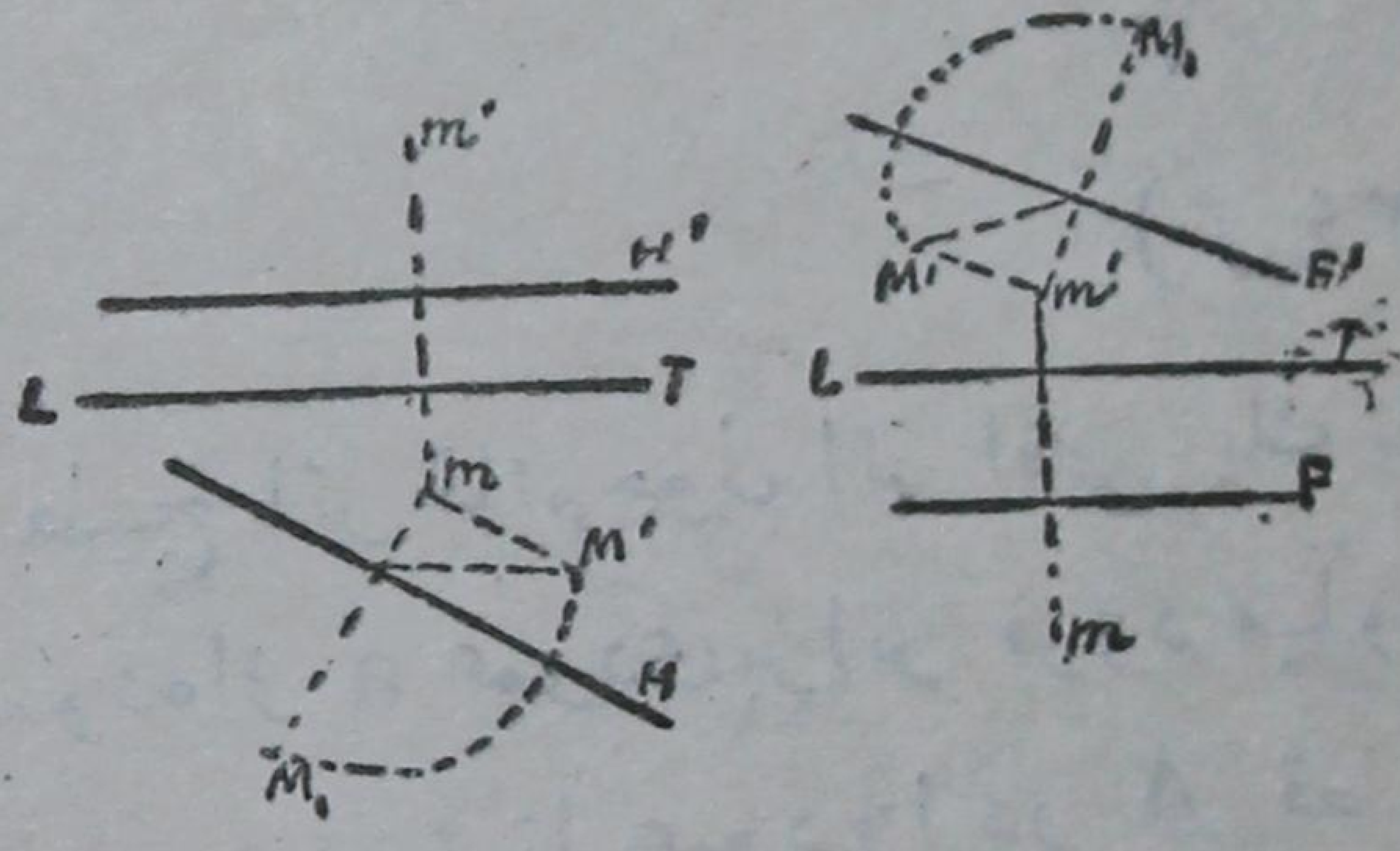
## پ - تسطیح

۵۴ - تسطیح یعنی موازی قراردادن يك شکل مستوی با صفحه افق یا صفحهٔ قائم .

برای این کار باید صفحه‌شکل راحول يك خط افقی یا جبهی بنام **لولا** آنقدردوران داد تا موازی صفحه افق یا قائم شود . تسطیح هرنقطه برروی عمودیست که ازتصویر آن بر لولا فرودآید وفاصله‌اش ازلولا وترسه برقائمیست که‌یك ضلع آن فاصله تصویر آن نقطه از لولا و ضلع دیگرش اختلاف

ارتفاع (یا بعد) نقطه و لولا باشد (رجوع شود بشماره ۲۳)

پس برای تسطیح یك نقطه حول یك افقیه (جبهیه) از تصویر افقی (قائم) نقطه خطی موازی لولا رسم و برروی آن باندازه اختلاف ارتفاع (بعد) نقطه و لولا جدا میکنیم و نیز از تصویر نقطه عمودی بر لولا فرود میآوریم و برامتداد آن طولی مساوی وتر سه بر قائمیکه برروی دوخط مرسوم ساخته شده باشد جدا مینمائیم (ش۳۳) (قاعده سه بر قائم). نقاط دیگر را بکمك آن نقطه تسطیح میکنیم .




(ش۳۳)

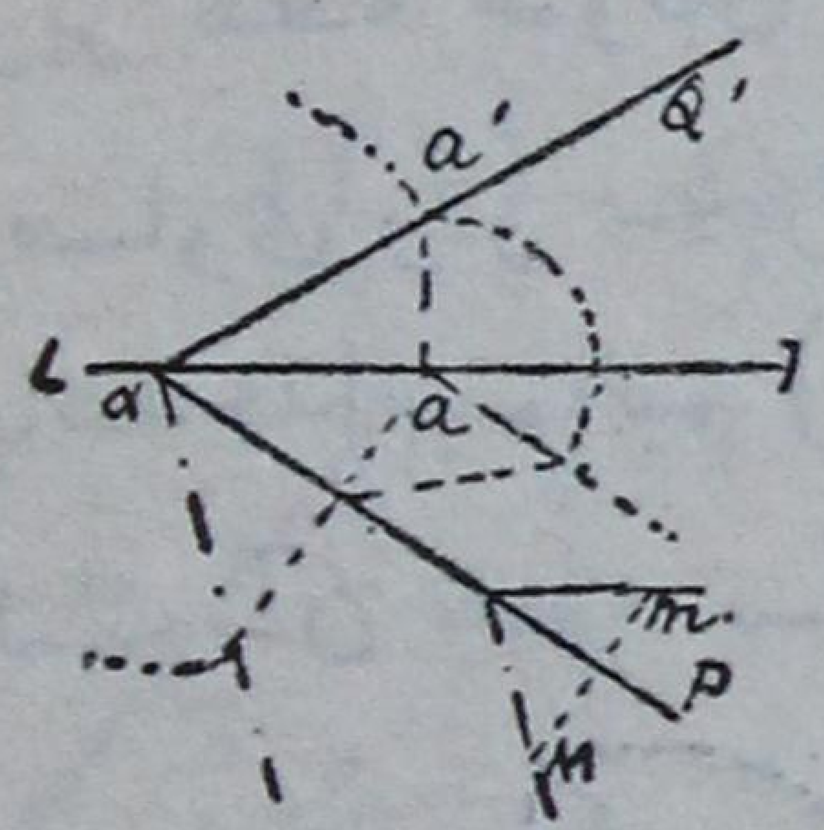
باید متوجه بود که نقاطیرا میتوان بکمك تسطیح نقطه A حول یك افقیه یاجبهیه تسطیح کرد که باآن نقطه و لولا دریك صفحه باشند .

۵۵ - **ترفیع** عکس عمل تسطیح است .

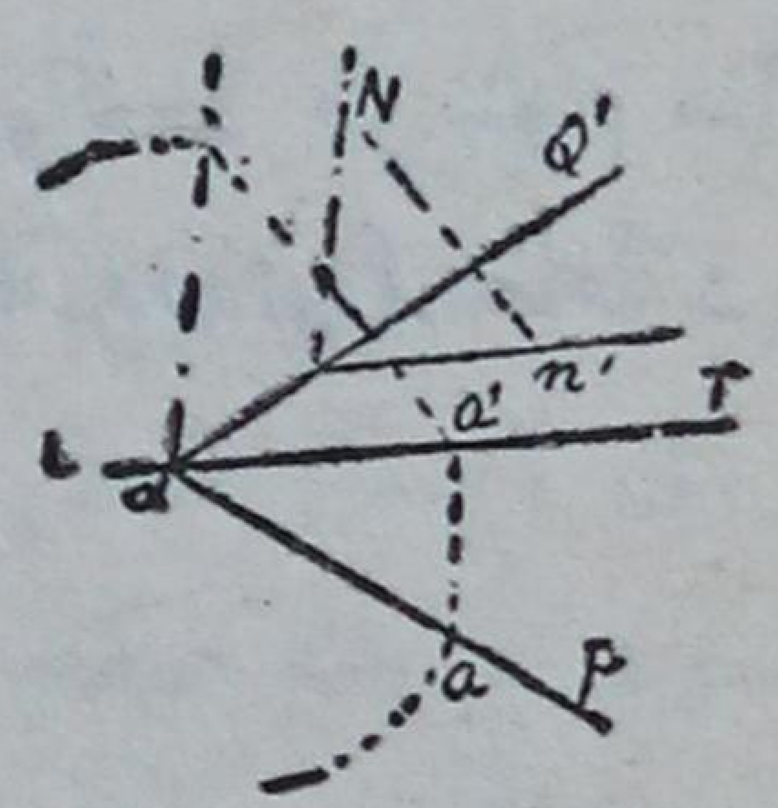
۵۶ - **تسطیح خط** - کافیست دو نقطه آنراتسطیح کرد وبکمك آنهاخط را تسطیح نمود . هرخط موازی لولا باشد تسطیحش هم با لولا موازیست . تسطیحات خطوط متوازی متوازیند .

۵۷ - **تسطیح صفحه** - معمولا صفحه را حول اثرافقی یا

قائم آن تسطیح میکنند و برای اینکار تسطیح اثر قائم را حول اثر افقی ( ش٣٤) یا تسطیح اثر افقی را حول اثر قائم (ش٣٥) بدست آورده سایر نقاط مانند mm‘ را بمدد آن تسطیح مینمائیم .



(ش٣٤)

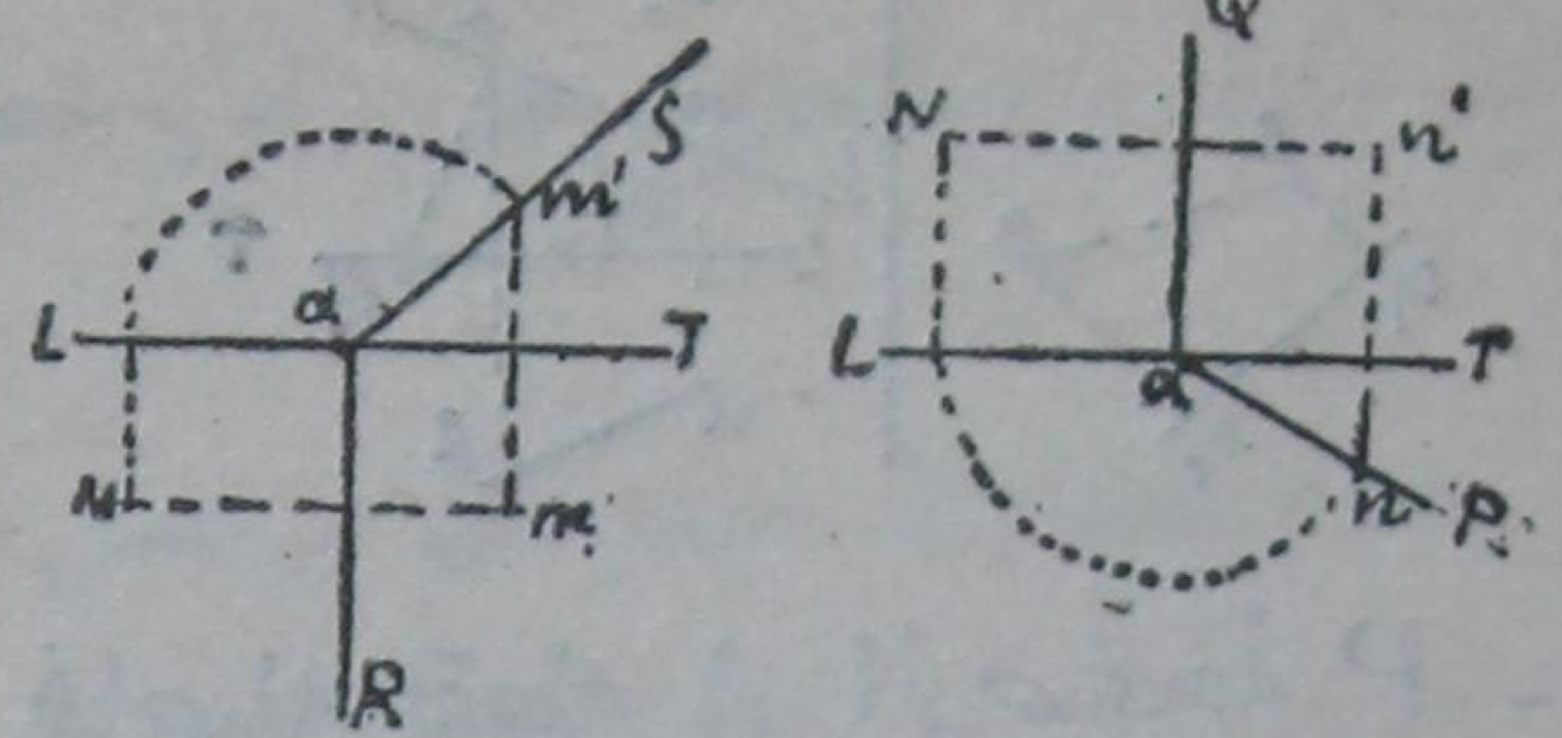


(ش٣٥)

برای تسطیح اثر قائم حول اثر افقی یك نقطه، امانند aa′، را اختیار نموده از a عمودی بر اثر فرود میاوریم و بمرکز α وشعاع αa قوسی میزنیم تا عمود را در A قطع کند . αA تسطیح اثر قائم است -

۵۸ - **قرارداد** - تسطیح خط را همیشه با خط نقطه نمایش میدهند .

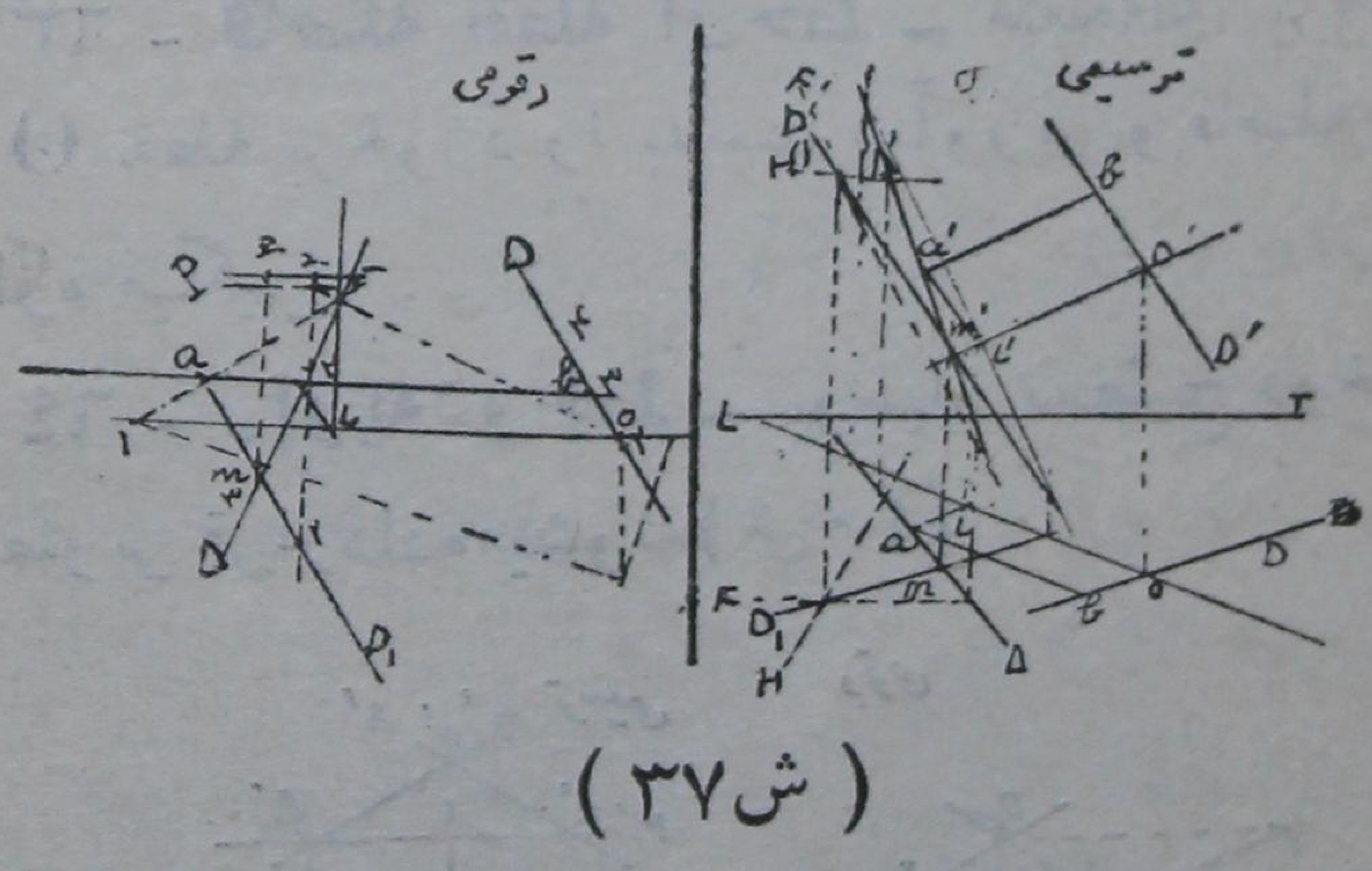
۵۹ - **تسطیح صفحه قائم یا منتصب** - برای تسطیح nm′ از صفحه قائم ( یا mm′ از صفحه منتصب) (ش٣٦) از m یا n عمودی بر لولا فرود میاوریم و بمرکز α وشعاع αm′ یا αn قوسی میزنیم تا خط الارض را در K قطع کند از K عمودی بر yx اخراج مینمائیم تا عمودی را که بر لولا وارد آمده است در N یا M قطع کند . N یا M نقطه مفروض است .




( ش۳٦ )

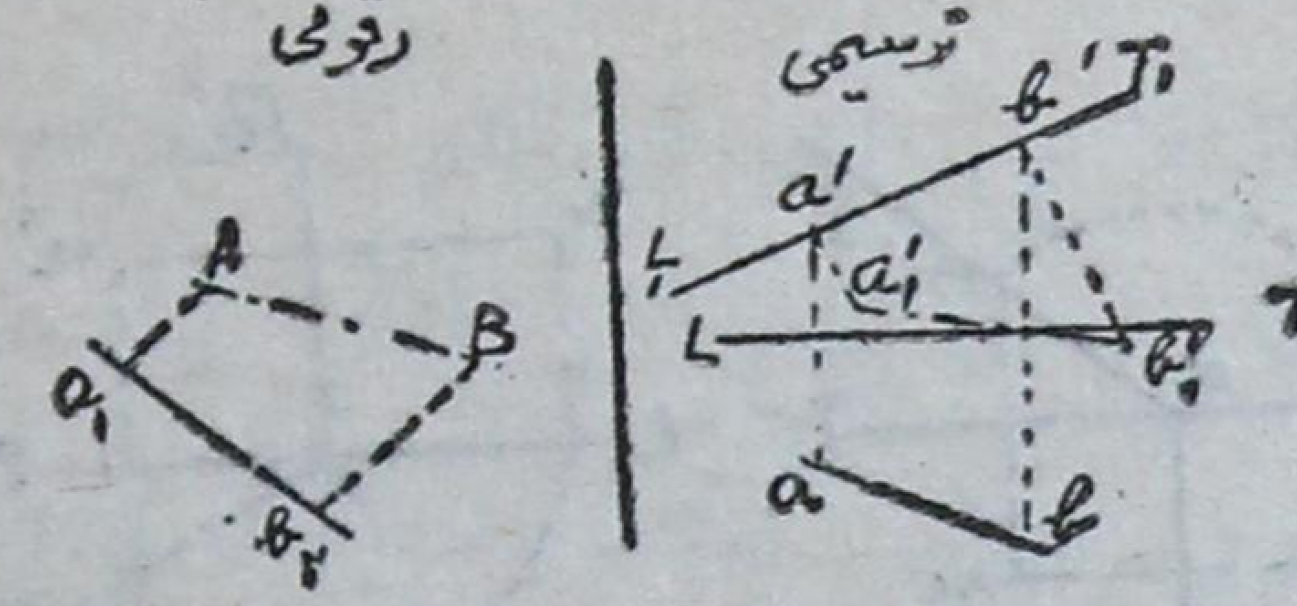
## ۳- موارد استعمال

**٦۰- عمود مشترك دوخط** - برای رسم عمودمشترك دوخط △ و ′△ بر△ صفحه‌ای موازی ′△ میگذرانیم وازیك نقطهٔ M از ′△ عمودی بر آن صفحه فرود میآوریم تا آنرا در A قطع کند، از A خطی موازی ′△ میکشیم تا △ را درB قطع نماید خط BC که موازی MA رسم شود جواب مسئله است.



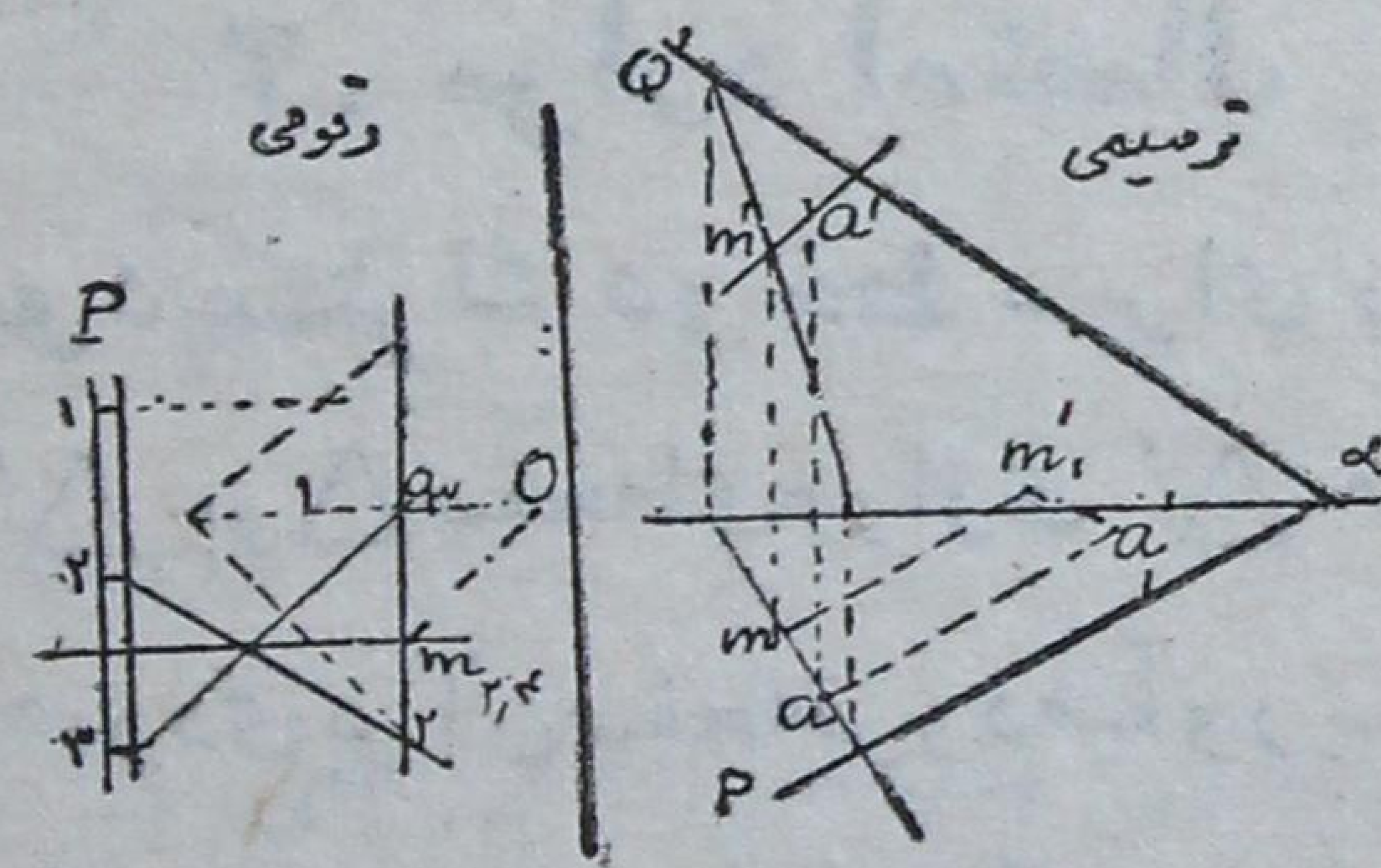

( ش۳۷ )

**٦۱- فاصله دو نقطه A و B** - در ترسیمی بکمك تغییر صفحه یا دوران ودررقومی بوسیله تسطیح خط واصل بین دو نقطه معلوم میشود (ش۳۸)




(ش۳۸)

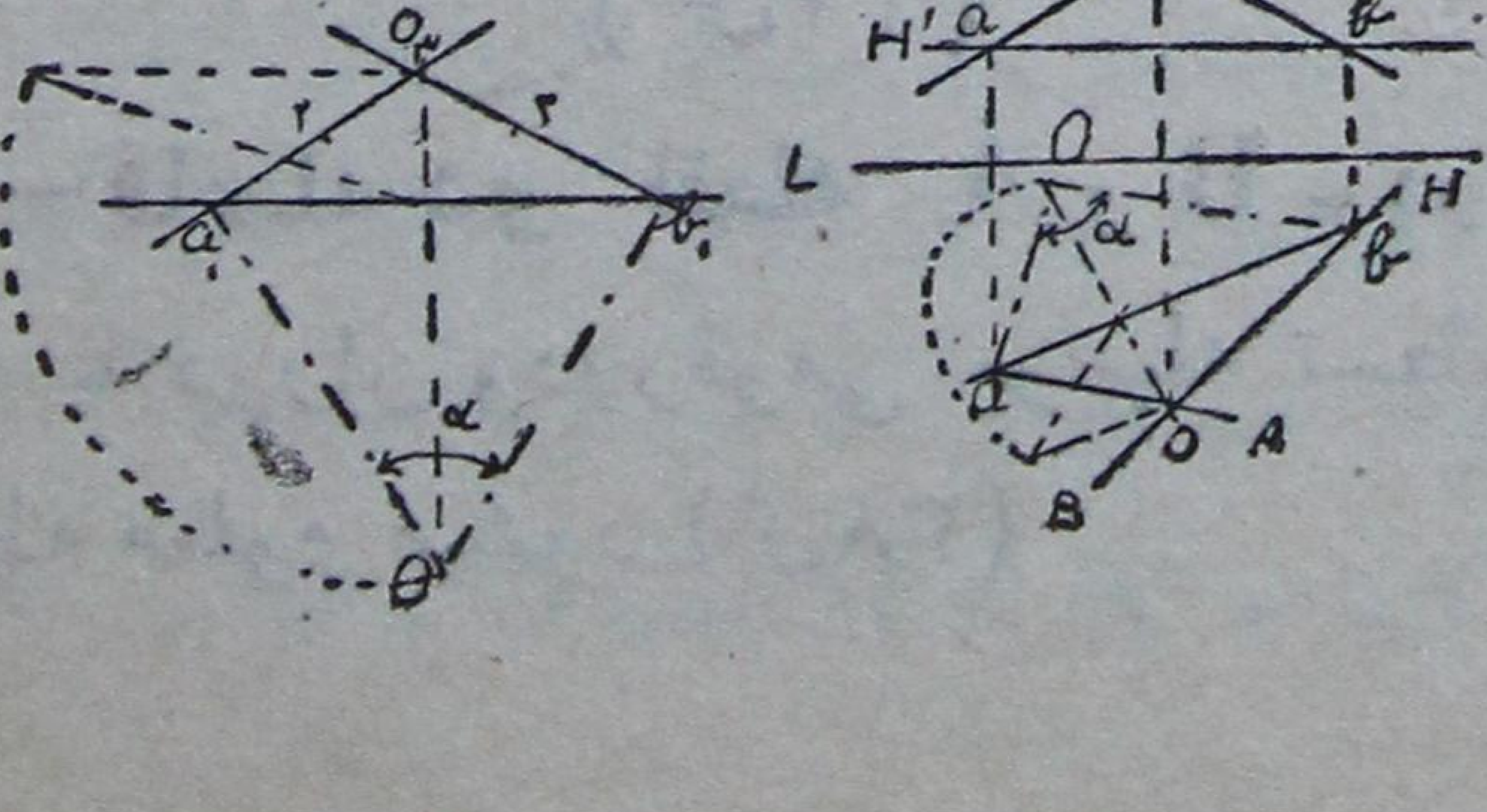
**۶۲ - فاصله نقطه A ازصفحهٔ P** - عمود AO را که موقع آن درصفحه O است بر P وارد آورده فاصله نقاط A و P را معین میکنیم (ش۳۹)




( ش۳۹ )

**۶۳ - فاصله نقطه ازخط** - صفحه‌ای برخط عمود کرده O نقطه برخورد را بدست میآوریم و فاصله M از O را اندازه میگیریم.

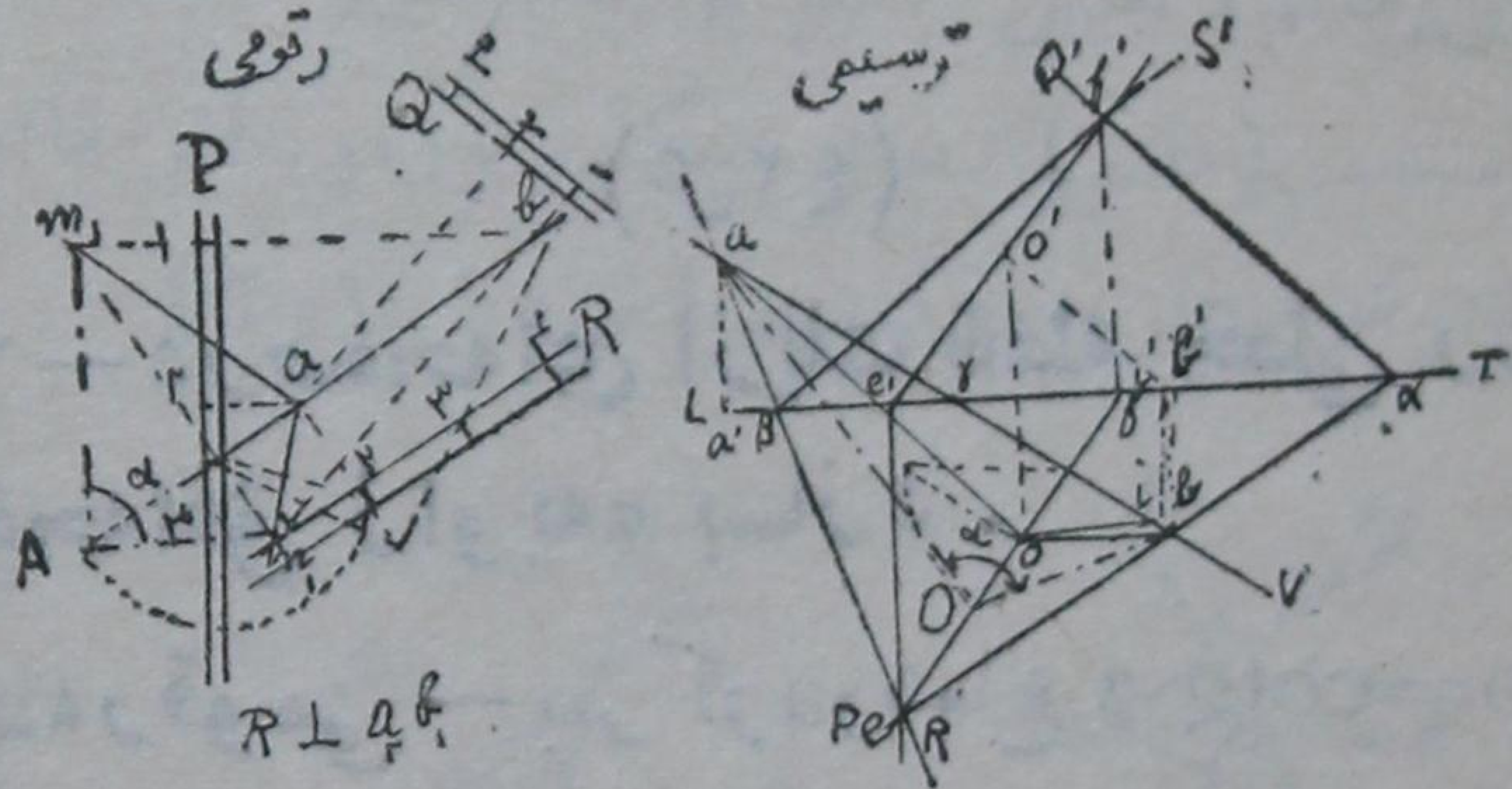
**۶۴ - زاویه‌دوخط** - بوسیله تسطیح دوخط موازی صفحه‌تصویر قرارداده‌میشوند(ش ۴۰)




(ش ۴۰)

**۶۵-زاویه خط وصفحه** - یعنی زاویه خط باتصویرش برصفحه .

**۶۶-زاویه دوصفحه**- صفحه‌ای برفصل مشترك آنها عمود نموده فصل مشترك آنرا باهریك ازآن دو پیدا میکنیم (ش۴۱)،زاویهٔ بین دوفصل مشترك زاویهٔ بین دوصفحه است

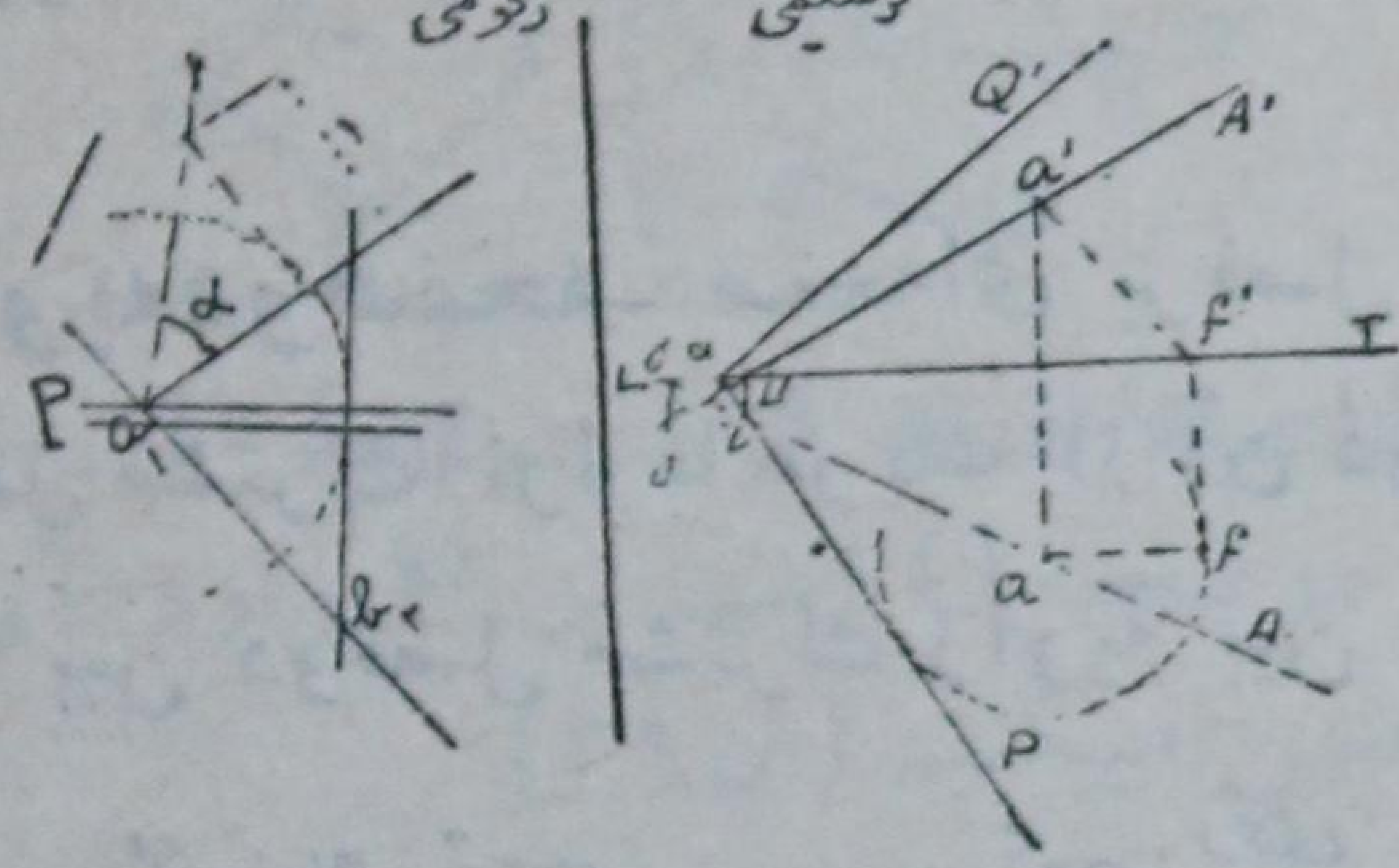



( ش۴۱)

**۶۷ - برخطی صفحه‌ای بگذرانید که با صفحه افق زاویه $\alpha$ تشکیل دهد .**

**هندسه رقومی** : بمرکز $a_1$ وشعاع برابر $\cot g\alpha$ دایره‌ای میزنیم و از $b_2$ مماسی برآن دایره رسم میکنیم، شعاعی ازدایره که براین مماس عمود شود مقیاس شیب صفحه مطلوبست (ش۴۲)

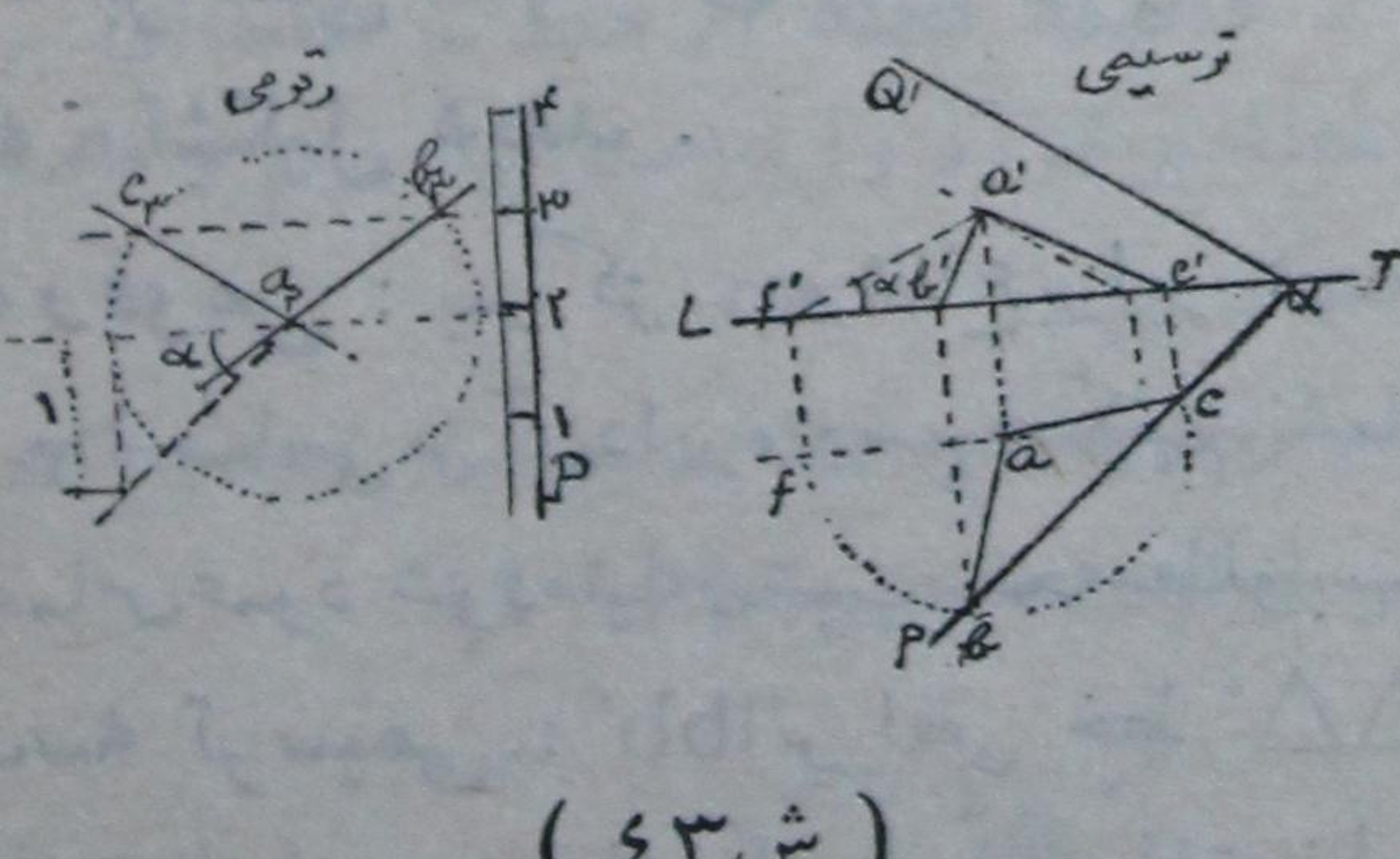
**هندسه ترسیمی** : $bb'$ اثر افقی خط $\Delta\Delta'$ را تعیین میکنیم ازیك نقطه $aa'$ جبهیه‌ای که باصفحه افق زاویه $\alpha$ بسازد رسم نموده $cc'$ اثر افقی آنرا بدست میآوریم ، بمرکز a و شعاع ac دایره‌ای ترسیم نموده از b مماسی برآن رسم میکنیم این مماس اثر افقی صفحهِ مطلوبست (ش۴۲) اثرقائم آن براثر قائم‌خط $\Delta\Delta'$ نیز میگذرد .




(ش۴۲)

**۶۸ — درصفحه‌ای ازیك نقطه خطی رسم کنید که با صفحه‌افق زاویه α بسازد.**

**هندسه‌رقومی** — بمرکز a وشعاع p=cotg α دائره‌ای میزنیم تا افقیه رقوم ۲ صفحه را در b و c قطع کند، ab و ac دوجواب مسئله‌اند (ش۴۳)

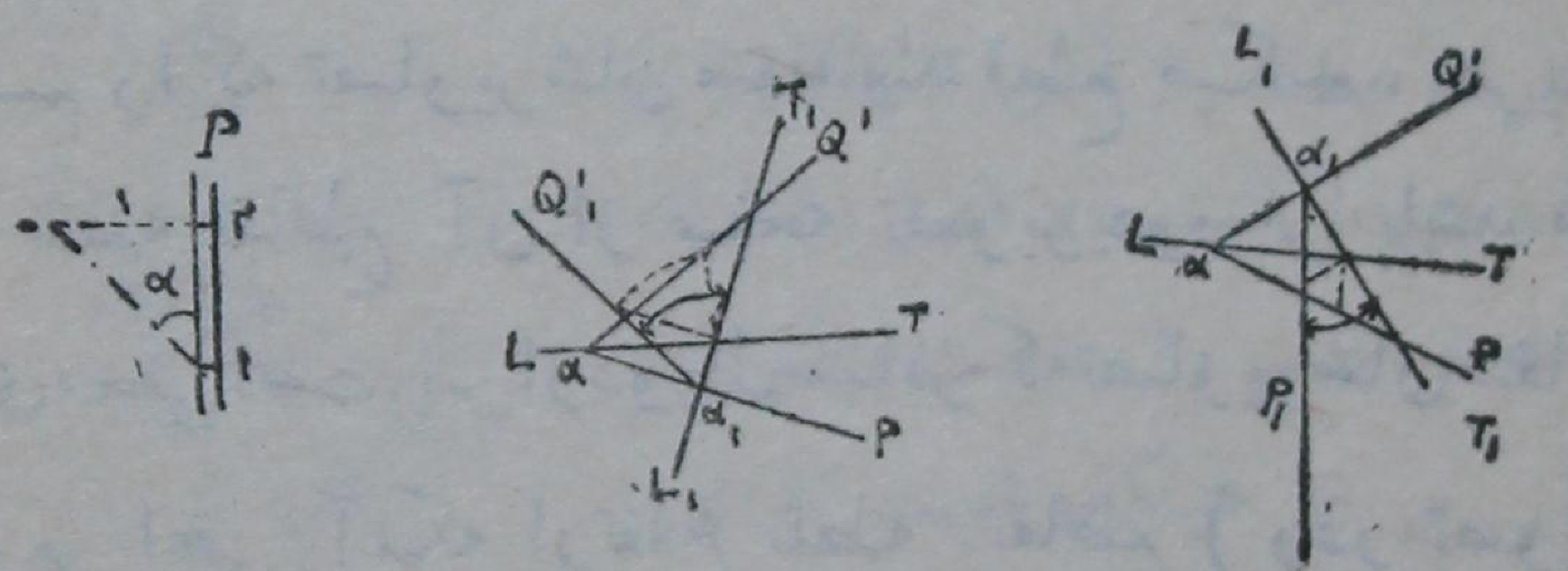



( ش۴۳ )

**هندسه ترسیمی** : از 'aa جبهیه ای رسم میکنیم که باافق‌زاویه α بسازد ، 'ff اثرافقی آنرابدست‌می آوریم بمرکز a وشعاع af دایره‌ای میزنیم تا اثر αP را در b و c قطع کند 'aba' b و 'aca'c جوابهای مسئله‌اند (ش۴۳)

**۶۹ — زاویه صفحه باصفحات تصویر - هندسه رقومی** : برای تعین زاویه صفحه P با صفحه افق کافیست زاویه تسطیح مقیاس شیب صفحه را با تصویر آن بدست آورد (ش ۴۴) .

**هندسه ترسیمی** : برای اینکه زاویه صفحه $P\alpha Q'$ را با صفحه افق (قائم) تعیین کنیم بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) آنرا بصفحه منتصب (قائم) تبدیل میکنیم وزاویه اثر قائم (افقی) را با خط الارض اندازه میگیریم (ش ۴۵ ، ۱ و ۲)



ش ۴۴      ش ۴۵ . ۱      ۲

**۷۰ - زاویه خط باصفحات تصویر**

**هندسه رقومی** : زاویه خط و تسطیح آن .

**هندسه ترسیمی** - برای آنکه زاویه خط 'DD را با صفحه افق (قائم) تعیین نمائیم آنرا بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) تبدیل بخط جبهی (افقی) میکنیم وزاویه تصویر قائم (افقی) را باخط الارض اندازه میگیریم .

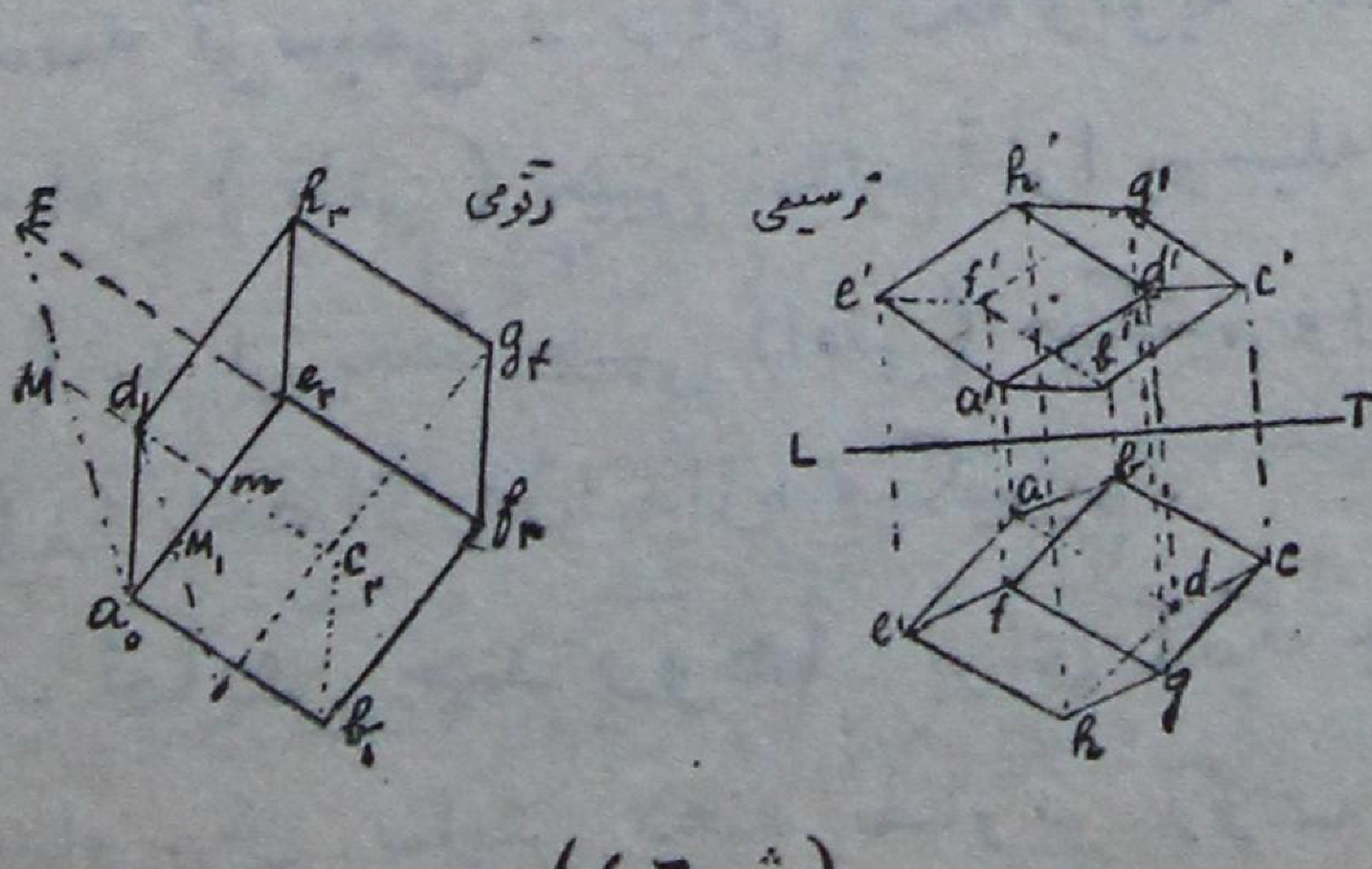
**۷۱ - نمایش چند روها** . برای آنکه چند روئی را بوسیله تصاویرش نمایش دهند تصاویر رؤس و اضلاع را

رسم میکنند . تصاویر تمام رؤس و اضلاع درداخل خط شکسته مسدودی واقعند که **دورهٔ ظاهری** نامیده میشود .

## خطوط واقع در درون دوره ظاهری برخی مرئی و بعضی مخفی میباشند .

برای تشخیص خطوط مرئی از مخفی فرض میکنیم چشم بفاصله بی نهایت دور ازصفحه تصویر واقع باشد در نتیجه خطی که ازمحل تقاطع ظاهری دوخط واقع دردرون دورهٔ ظاهری بجسم وصل شود برصفحه تصویر عمود میشود . این خط دو یال جسم را که تصاویرشان متقاطعند قطع میکند ، هریك ازدو یال که نقطه تقاطع آن از صفحه تصویر دور تر باشد مرئی و دیگری مخفی است. پس ازدو یال متنافر که تصاویرشان متقاطع باشند درتصویر افقی آنکه ارتفاع نقطه تقاطع ( ودر تصویر قائم اینکه بعد نقطه تقاطع ) برآن بیشتر است مرئی است . هر یال که بیك نقطه غیرمرئی وهرصفحه که بیك یال غیرمرئی محدود گردد غیرمرئی میباشد .

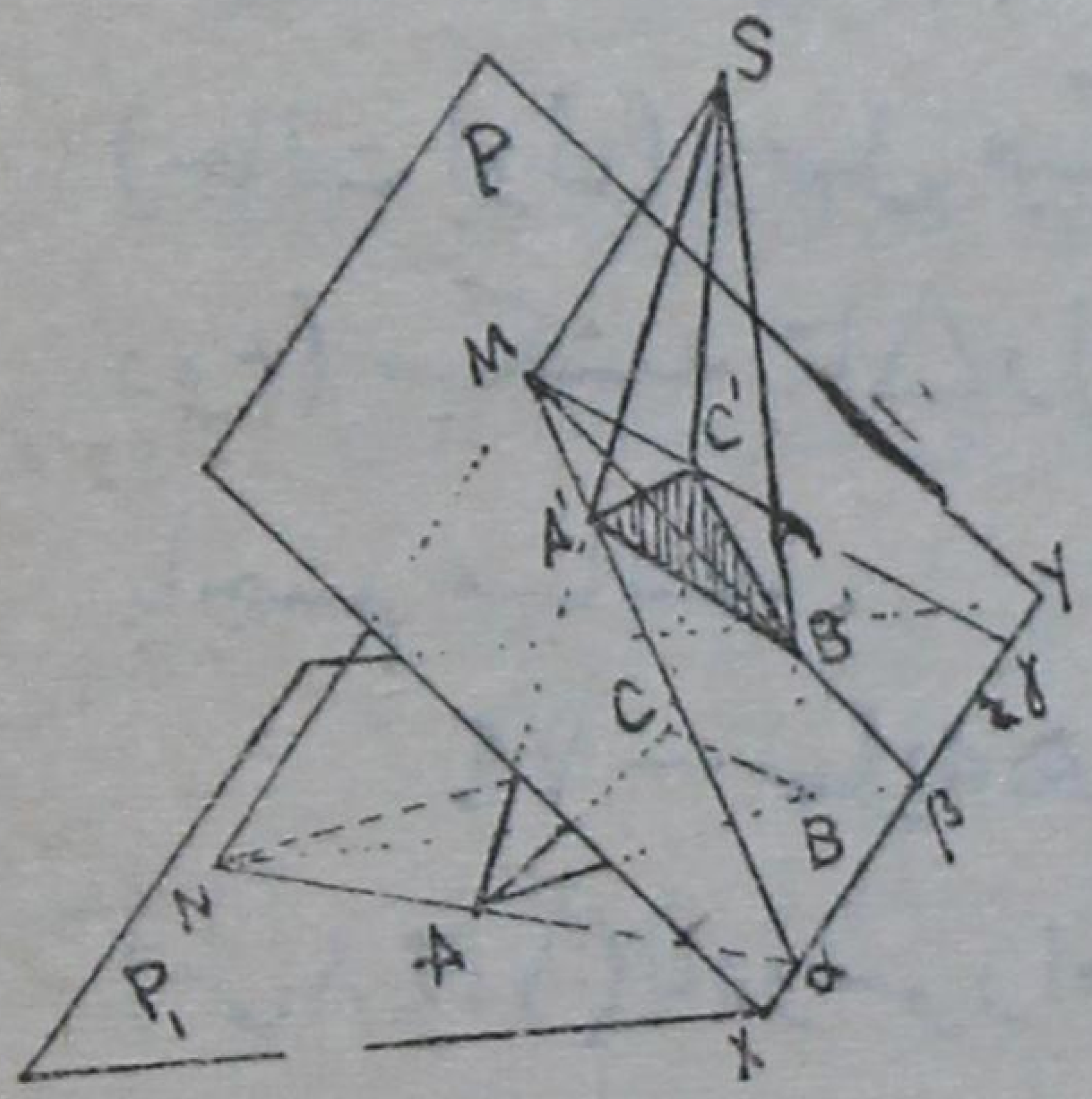
**مثال :**




(ش٤٦)

ارتفاع m روی Cd کمتر است تا روی ae ، پس ae ودر نتیجه fe و eh مرئی هستند .

**۷۲ - مقطع اجسام** — مقطع هر صفحه در یك چند رو چندبری است که رؤس‌ش فصل مشترك یالهای چند رو با صفحه و اضلاعش فصل مشترك روهای جسم با صفحه‌اند . پس برای بدست آوردن مقطع بدو طریق میتوان عمل کرد : ۱) تعیین رؤس ۲) تعیین اضلاع .




(ش ۴۷)

ا — **تعیین رؤس** - اگر بخواهیم فصل مشترك صفحه P (ش ۴۷) را با هرم SABC پیدا کنیم xy فصل مشترك P با قاعده جسم را بدست میآوریم بعد خطی بر S میگذرانیم تا P و صفحه قاعده را در M و N قطع کند از N به رؤس قاعده وصل نموده امتداد میدهیم تا xy را در α و β قطع نمایند از α و β به N وصل مینمائیم تا یالهای منتهی برؤس وابسته را تلاقی نمایند. این نقاط رؤس مقطعند.

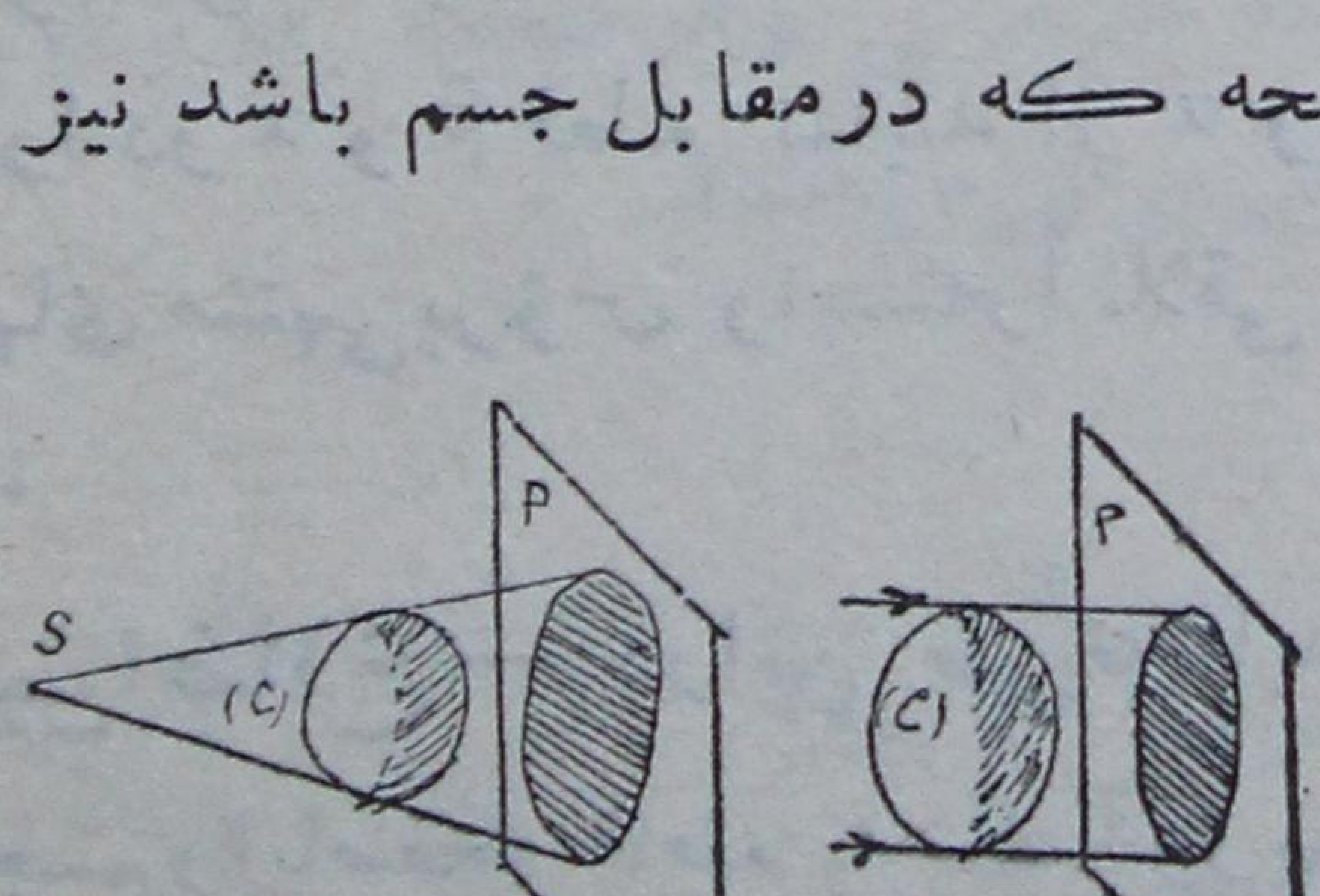
ب - **تعیین اضلاع** — دراین طریقه باید فصل مشترك یکایك روهای جسم را باصفحه قاطع بدست آوریم؛ قسمتی از فصل مشترکها که در خارج وجوه جسم واقع شوند جزء مقطع نیستند

**۷۳ — فصل مشترك خط با چندرو** - برای بدست آوردن فصل مشترك خط △ بایك جسم، که نقاط ورود و خروج

خط در جسم نامیده میشوند ، بر△ صفحه اختیاری گذرانیده مقطع آنرا با جسم بدست میآوریم ، نقاط برخورد△ بامحیط مقطع نقاط مطلوبند .

اگرجسم دارای رأس باشد ، مانند هرم ، صفحه فرعی را عموماً بررأس جسم میگذارندوهرگاه‌جسم یالهای‌موازی داشته باشد،مانند منشور ، صفحه فرعی را معمولا بموازات‌آن یال مرورمیدهند ودرهرحال نقاط مشترك صفحه فرعی را بسا محیط قاعده جسم بدست آورده از نقاط تقاطع برأس ( در حالت اول) وصل میکنند،یا خطوطی موازی یال ( در حالت دوم) میکشند تا△را قطع کنند ، نقاط تقاطع محل تلاقی خط باجسم میباشند .

۷۴ — **سایه‌ها** — اگرجسمی درمقابل یك نقطه‌نورانی (ش ۱،۴۸)یادرسرراه یکدسته‌شعاعهای نورانی (ش ۲،۴۸)قرار گیرد قسمتی از خود جسم تاریك است ( سایه خاص ) و قسمتی ازهرصفحه که درمقابل جسم باشد نیز در سایه است (سایه منتقل)




ش ۴۸

اشعه‌ای که بجسم میتابند در صورت‌اول مخروط و در

صورت دوم استوانه‌ای تشکیل میدهند که مخروط یا استوانهٔ سایه نام دارند .

درحالت اول سایه را **مشعلی** و درحالت دوم آن را **شمسی** مینامند .

دوره ظاهری سایه منتقل سایه خطی است که مخروط یا استوانهٔ سایه درامتداد آن برجسم مماس گردیده است. سایهٔ سایر رؤس و یالهای جسم در داخل دورهٔ ظاهری واقع میشوند.

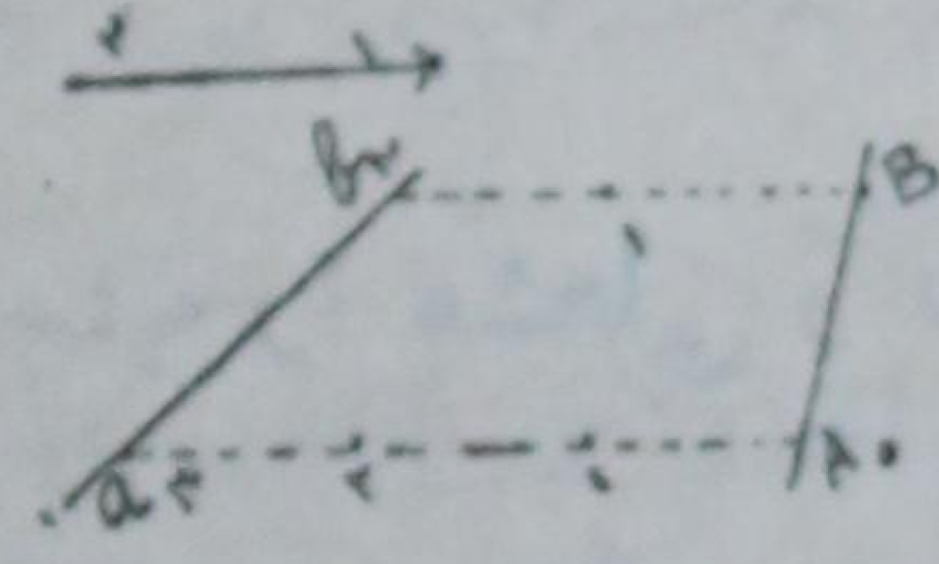
ازدو یال متنافر که سایه های آنها دردرون دورهٔ ظاهری سایه متقاطع میشوند یکی روشن ودیگری تاریك است . برای تشخیص آن که روشن است فصل مشترك شعاع نورانی منتهی بنقطه تقاطع سایه‌ها را با یالها بدست میآوریم یالی که نقطه تقاطعش بمنبع نور نزدیکتر باشد روشن است .

اگرسایه منتقل یالی در داخل دورهٔ ظاهری واقع شود برحسب آنکه یال روشن یا تاریك باشد دو روی منتهی بآن روشن یا تاریك خواهند بود .

درصورتیکه سایه رأسی درون دوره ظاهری افتد برحسب آنکه رأس روشن یا تاریك باشد یالهای منتهی بآن روشن یا تاریك خواهند بود .

**مثال** – سایه منتقل SA را بموازات امتداد تیر برصفحه تصویر معین کنید .

رقومی

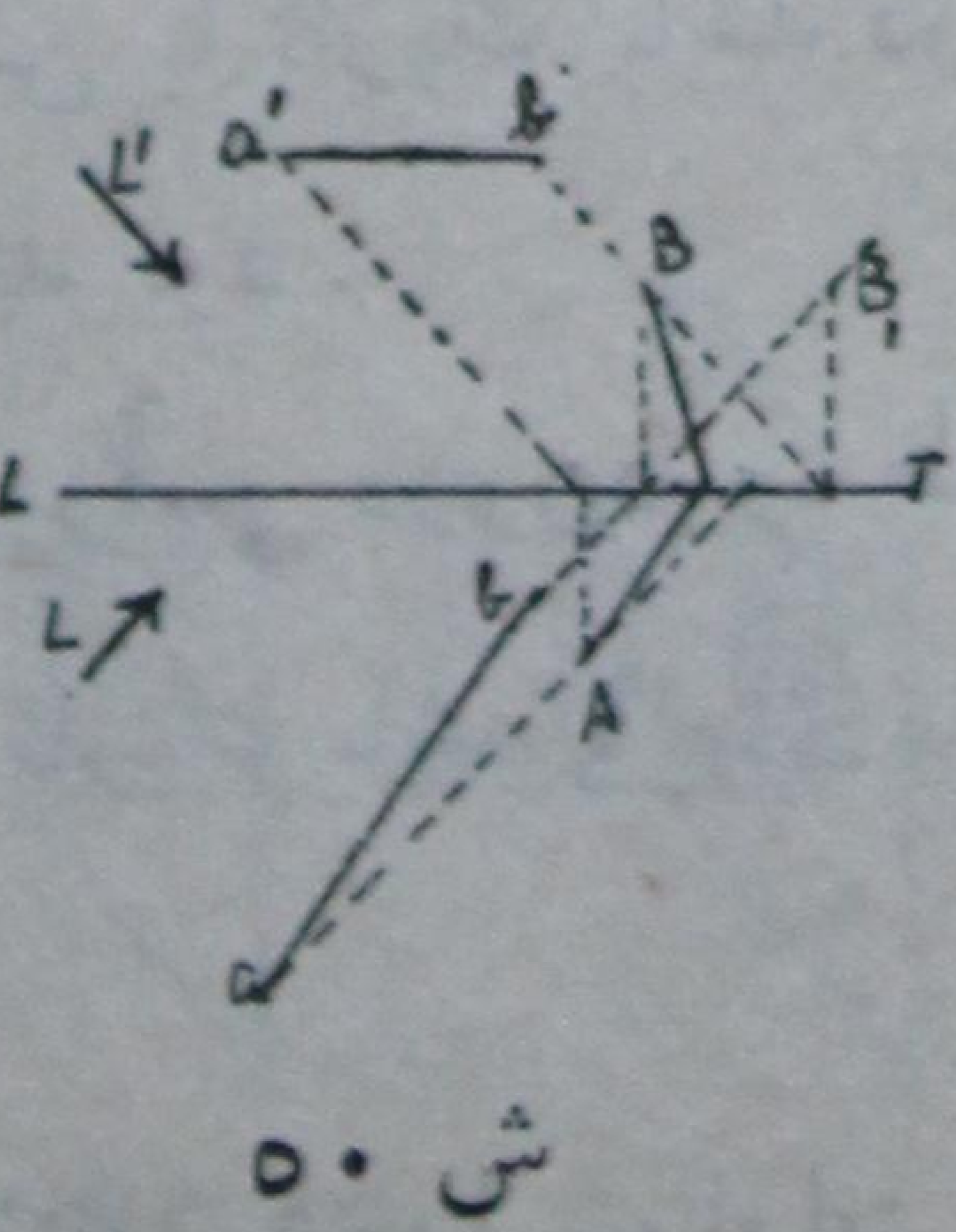


ش ۴۹

ترسیمی

ممکن است قسمتی از سایه یك یال، مانند ab، بر صفحه افق وقسمتی بر صفحه قائم افتد. برای تشخیص آن باینطریق عمل می کنیم:

فرض میکنیم A سایه 'aa بر صفحه افق و B سایه "bb بر صفحه قائم واقع شود $B_1$ سایه 'bb را بفرض اینکه صفحه قائم نباشد برافق تعیین میکنم A و $B_1$ خط الارض را در α قطع میکند، Aα قسمتی از سایه یال BA واقع بر صفحه افق و Bα قسمتی از آن واقع بر صفحه قائم است (ش ۵۰)



ش ۵۰

# مکانیک

## I - بردارها - عزم

**۱ - بردارها** - بصفحه ۱۹۳ شماره‌های ۱۳۶ تا ۱۴۴ مراجعه شود.

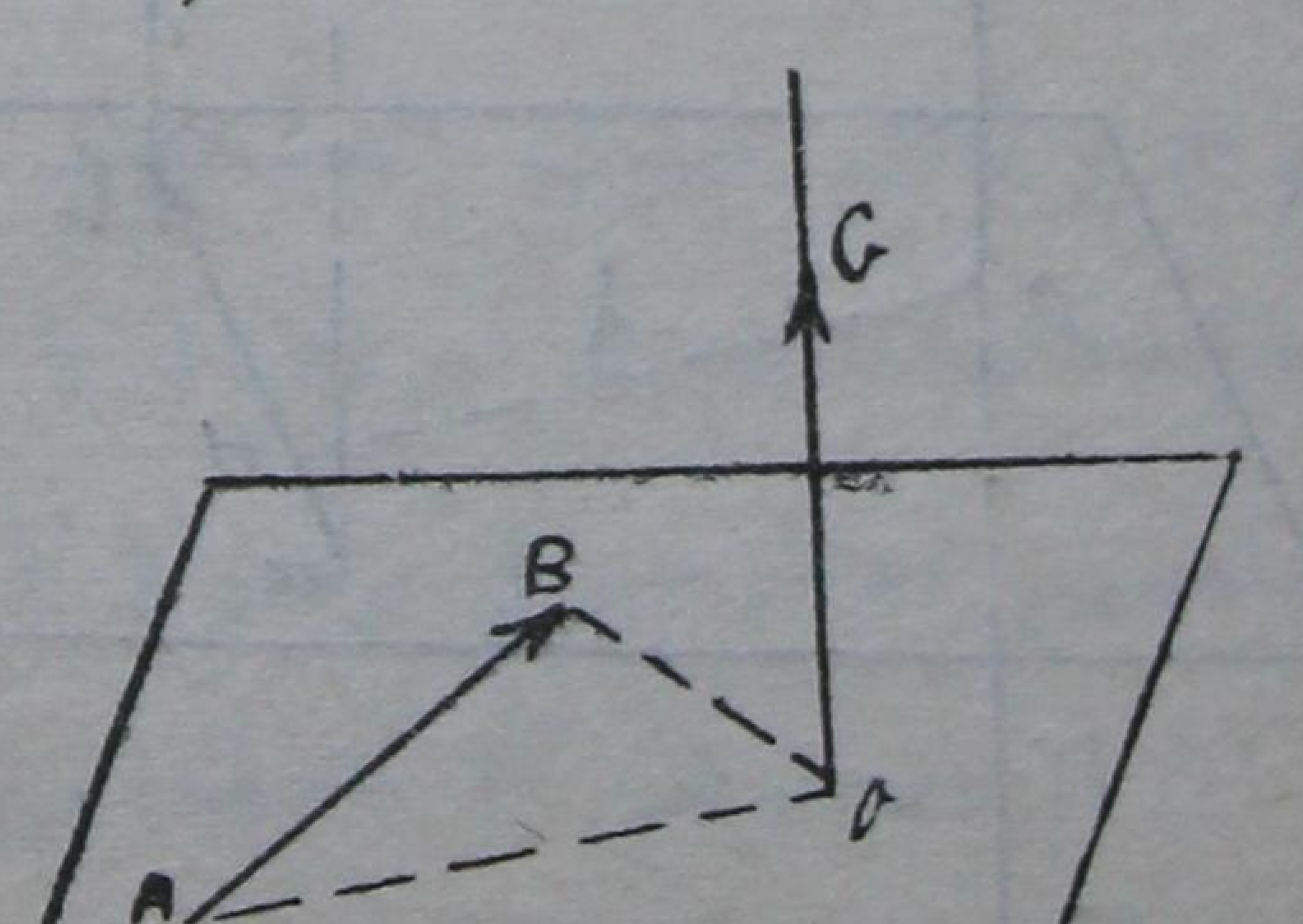
**۲ - جهت دوران** - اگر شخصی درامتداد محوری بطریقی قرار گیرد که سرش بطرف مثبت محور متوجه باشد برای او جهت مثبت دوران جهت حرکت از چپ براست است این جهت را **مستقیم** ومخالف آنرا **معکوس** گویند.

دو بردار متعامد نسبت بهم مستقیمند موقعی که اگر شخصی درامتداد یکی از آنها قرار گیرد بطوریکه سرش بطرف انتهای بردار متوجه باشد و بردار دیگر را نگاه کند جهت بردار دوم نسبت باو ازچپ براست باشد. در غیر این حال دو بردار نسبت بیکدیگر معکوسند.

**۳ - عزم مرکزی** - عزم بردار AB نسبت بنقطه O

$$M_o(AB) = (OG)$$

بردار دیگری است مانند OG (ش۱) که:




(ش۱)

۱) مبدأ آن نقطه O میباشد .

۲) محملش عمودی است که از نقطه O بر صفحه OAB اخراج شود .

۳) جهتش نسبت ببردار AB مستقیم است .

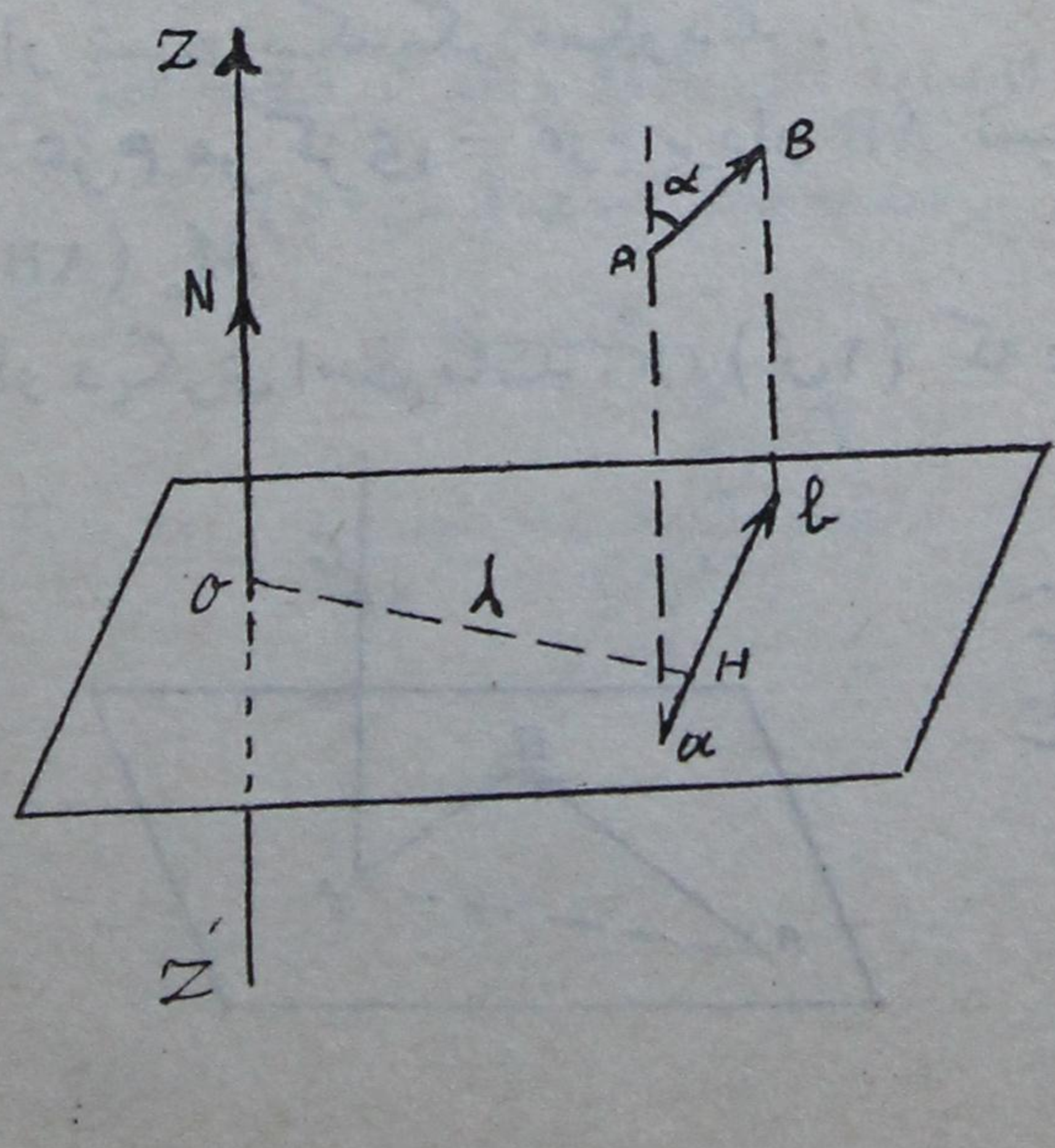
٤) طولش بحسب عدد دو برابر مساحت مثلث OAB است

٤- عزمهای دو بردار متقابل نسبت بیك نقطه دو بردار متقابلند

٥ - عزم یك بردار تغییر نمیکند اگر: ۱) بردار بر محملش حرکت کند ۲) مبدأ آن ثابت بوده انتهایش برخطی موازی OA تغییر مکان دهد .

٦- اگر مرکز عزم بر بردار منطبق یا طول بردار صفر باشد عزم آن صفر است .

۷ - **عزم محوری** - عزم بردار (AB) نسبت بمحور ZZ′ عبارتست از عزم تصویر قائم (AB) بر صفحه‌ای که بر ZZ′ عمود باشد نسبت بنقطه تقاطع ZZ′ با آنصفحه (ش۲) واینطور نوشته میشود:




(ش ۲)

$$M_{zz'}(AB) = M_o\,(ab) = ON$$

حال اگر α و λ بترتیب زاویه بردار AB ومحور وطول عمود مشترك بردار AB ومحور ZZ' باشند:

$$ON = AB.\lambda.\,sin\alpha$$

۸ — عزم محوری یك بردار تغییر نمیکند هرگاه: ۱) بردار برمحمل خود حرکت کند ۲) سطح تصویر تغییر نماید.

۹- عزم محوری یك بردار صفر است وقتی: ۱) طول بردار صفر باشد ۲) بردار و محور در یك صفحه باشند.

۱۰ — **قضیه** - تصویر قائم عزم مرکزی یك بردار بر محوری که برمرکزعزم بگذرد مساوی عزم بردار مفروض نسبت باین محور است.

۱۱ — **قضیه وارین یون** (Varignon) — عزم برآیند یکدسته بردار متقارب مساوی برآیند عزمهای بردارهای فروض است.

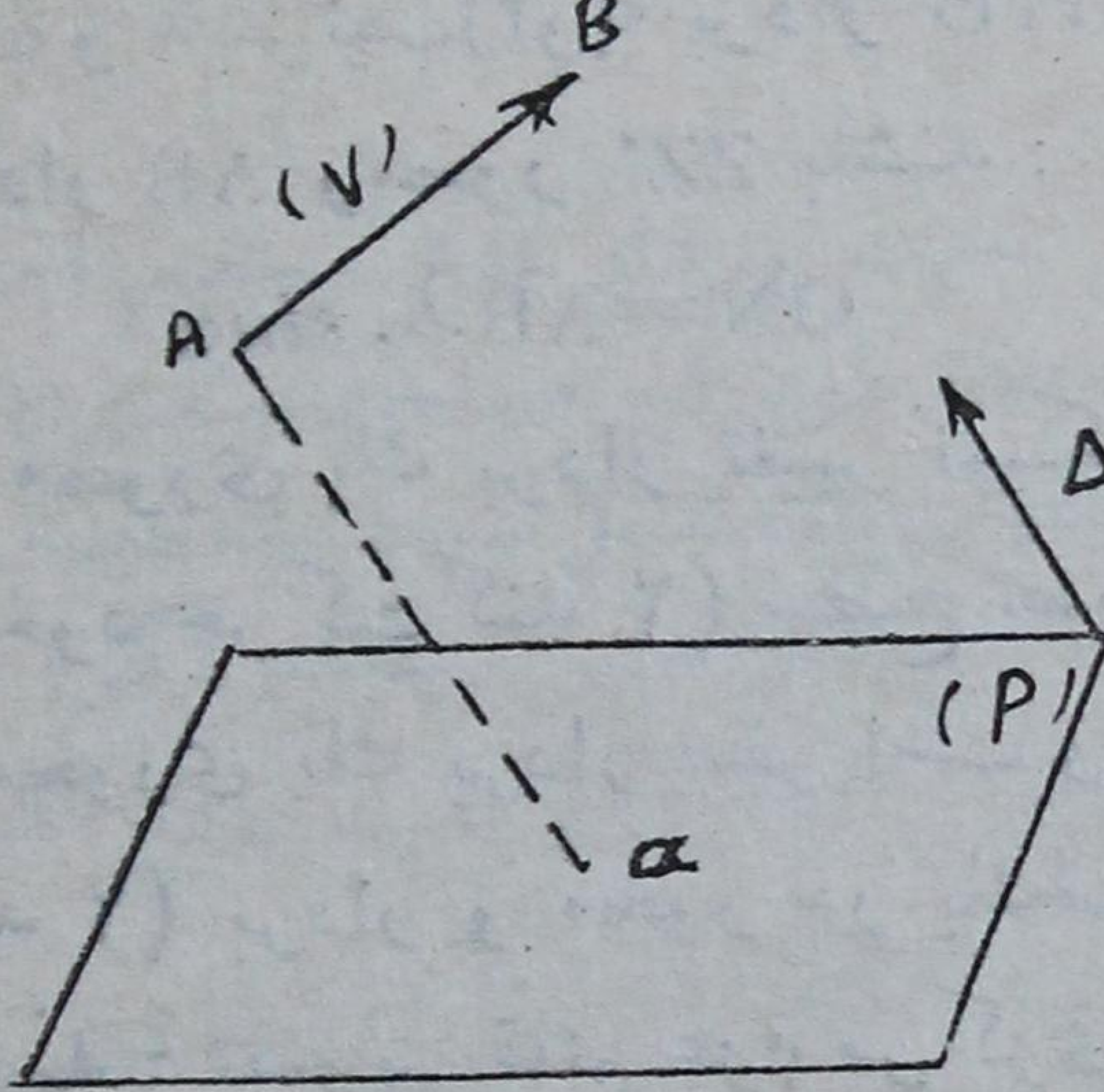
۱۲ — **تعریف** — برآیند عزمهای دو بردار زوج نسبت بیك نقطه را محور زوج مفروض گویند.

۱۳ — **قضیه** - محور یك زوج برداری است ثابت.

۱٤ - **عزم بردار نسبت بصفحه** - هرگاه صفحه P و امتداد △ داده شده باشند عزم هر بردار ( V ) نسبت بصفحه P عبارتست ازحاصلضرب مقدار جبری بردار ( V ) در مقدار جبری فاصله نقطه اثر آن ازصفحه وقتی که فاصله اخیر بموازات امتداد △ اندازه گرفته شده باشد (ش۳)

$$M_P(V) = (V) \cdot Aa$$

(۴)
(شکل ۴۰)




اندازه جبری فواصل نقاط اثر در بالای صفحه مثبت و در زیر آن منفی هستند.

اگر بردار درحول نقطه اثر خود دوران کند درعزم آن نسبت بصفحه P تغییری حاصل نمی شود، اما اگر بر محمل خود حرکت نماید عزم آن تغییر میکند.

## علم الحرکات (Cinematique)

## I - تعاریف

۱ - **سکون و حرکت** - وقتی فاصله نقطه M از نقاط مختلف جسم صلب S تغییر نکند M نسبت بآن جسم ساکن والا متحرک است.

۲ - **موضوع علم الحرکات** بحث در حرکت است بدون توجه بعلل پیدایش آن.

۳ - **معادله زمانی متحرك** - رابطه $S = f(t)$ را

معادله زمانی متحرک گویند ( $s$ مسافت مطویه و $t$ زمان حرکت است)

۴ — **مسیر حرکت** — راهی را که نقطه‌متحرک در فضا طی میکند مسیر متحرک نامند. برحسب آنکه مسیر مستقیم یا منحنی باشد حرکت، مستقیم الخط یا منحنی الخط است.

## II - حرکت مستقیم الخط متشابه

۵ — **تعریف** — هرگاه متحرکی برمسیر مستقیمی تغییر مکان دهد ودر یك جهت مسافاتی متناسب با زمان بپیماید حرکتش مستقیم الخط متشابه است.

۶ — **معادله حرکت** - هرگاه $s$ مسافت مطویه ، $t$ زمان ، $s_0$ مسافت اولیه ( فاصله از مبداء حرکت در لحظه $t = 0$ ) و $v$ سرعت حرکت باشد :

$$s = vt + s_0$$

۷ — **بردار سرعت** - محملش مسیر حرکت ، مبدءاش نقطه متحرك ، جهتش برحسب آنکه سرعت مثبت یامنفی باشد درجهت حرکت یا مخالف آنست . قدرمطلق آن مسافتی است که متحرک درواحد زمان میپیماید.

۸ — **قضیه** - هرحرکت مستقیم الخطی که معادله‌اش از درجه اول باشد متشابه است.

## III - حرکت مستقیم الخط متغیر

۹ - **تعریف** - وقتی متحرك برمسیر مستقیمی درزمانهای

متساوی مسافات غیر مساوی طی کند حرکتش مستقیم الخط متغیر است .

۱۰ - **معادله حرکت** ازدرجه اول برحسب t وعبارتست از : $s = f(t)$

۱۱ - **حامل سرعت** - برمسیر واقع است و مبدءاش نقطه متحرك وجهتش اگر مثبت باشد درجهت مسیر والا بر خلاف آنست. قدرمطلق آن مشتق s یعنی $v = f'(t)$ میباشد.

۱۲ - **حامل شتاب** برمسیرواقع وقدرمطلقش مشتق ثانی s یعنی $\gamma = f''(t)$ میباشد ، جهتش درصورتیکه تابع v صعودی باشد درجهت مثبت مسیر والا برخلاف آن است .

۱۳ - حرکت را **مسرعه** گویند اگرسرعت ازحیث قدر مطلق ترقی کند والا **مبطئه** نامند .

۱٤ - **دیاگرام حرکت** - سه منحنی نمایش تغییرات توابع s و v و γ را که نسبت بدو محور ot و os رسم شوند دیاگرام حرکت نامند .

## IV - حرکت متشابه التغییر

۱۵ - **تعریف** - وقتی سرعت تابع درجه اولی نسبت بزمان باشد حرکت مستقیم الخط متشابه التغییر است .

۱ - معادله حرکت

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + s_0$$

۲ - سرعت : $v = \gamma t + v_0$

۳ - شتاب : $\gamma =$ مقدار ثابت

اگر $\gamma > 0$ باشد حرکت مسرعه و اگر $\gamma < 0$ باشد مبطئه است.

٤ — مقدار سرعت برحسب مسافت:

$$v = \sqrt{2\gamma(s - s_0) + v_0^2}$$

## V ـ حرکت نوسانی ساده

۱٦ — **تعریف** ـ اگر متحرک M برمحیط دائره‌ای بشعاع R حرکت متشابه داشته باشد تصویرش برخطی که در صفحه همین دایره واقع باشد دارای حرکت نوسانی ساده خواهد بود.

۱ — حرکت نوسانی ساده حرکت مستقیم الخطی است متناوب و بمعادله:

$$x = R\cos(\omega t + \alpha)$$

۲ـ دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ؛ تواتر: $n = \frac{1}{T}$

۳ـ سرعت: $v = -R\omega\sin(\omega t + \alpha)$

٤ـ شتاب: $\gamma = -R\omega^2\cos(\omega t + \alpha) = -x\omega^2$

٥ـ پس از حذف t درروابط فوق:

$$v = \pm\omega\sqrt{R^2 - x^2} \quad \gamma = \pm\omega\sqrt{R^2\omega^2 - v^2}$$

## VI ـ حرکت منحنی الخط متشابه

۱۷ — **قضیه** ـ تصاویر حاملهای سرعت وشتاب حرکت هرمتحرک M برهرمحور سرعت وشتاب حرکت تصویر متحرک M است برآن محور.

## ۱۸ — مشخصات حرکت

اگر s مسافت طی شده در روی منحنی ، t زمان ، x ، y ، z ، مختصات متحرك ، v سرعت ، $v_x$ و $v_y$ ، $v_z$ تصاویر سرعت برمحورها، $\gamma$ شتاب ، $\gamma_x$ و $\gamma_y$ و $\gamma_z$ تصاویر شتاب بر محورها باشند :

۱ — معادله زمانی حرکت :

$$s=f(t) \qquad v=f'(t) \qquad \gamma=f''(t)$$

۲ — مختصات زمانی متحرك

$$x=f(t) \qquad y=g(t) \qquad z=h(t)$$

$$v_x=f'(t) \qquad v_y=g'(t) \qquad v_z=h'(t)$$

$$v=\sqrt{f'(t)^۲+g'(t)^۲+h'(t)^۲}$$

$$\gamma_x=f''(t) \qquad \gamma_y=g''(t) \qquad \gamma_z=h''(t)$$

$$\gamma=\sqrt{b''(t)^۲+g''(t)^۲+h''(t)^۲}$$

**۱۹ — هدگراف** — اگر از نقطه A درهر لحظه برداری همسنك سرعت رسم کنیم انتهای این بردار منحنی ای می پیماید که هدگراف نام دارد، پس هدگراف مکان هندسی انتهای بردارهائی همسنك سرعت است که ازیك مبداء رسم شده باشند .

## VII . حرکت مستدیر متغیر

**۲۰ — تعریف** - وقتی مسیر متحرك دایره یا قوسی ازآن

باشد حرکت را مستدیر گویند .

۱ - **معادله حرکت** - اگر $\theta$ اندازه زاویه مرکزی AOM برحسب رادیان و A مبداء قوس s و O مرکز و R شعاع دایره و M متحرك مفروض و $s_0$ مسافت اولیه باشد :

$$\theta = f(t) \quad و \quad s = R\theta + s_0$$

۲ - مختصات نقطه M نسبت بمحور OA ومحور عمود بر آن :

$$y = R\sin\theta \quad و \quad x = R\cos\theta$$

۳ — سرعت زاویه‌ای $\omega = f'(t)$

٤ — حامل سرعت مماس بر دایره مسیر و اندازهٔ آن $v = R\omega$ یا $v = s' = R\theta'$ است

۵- شتاب زاویه‌ای متحرك عبارتست از $\dfrac{d\omega}{dt}$ و شتاب منتجه عبارت خواهد بود از

$$\gamma = R\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}$$

## VIII - حرکت مستدیر متشابه

۱ - معادله حرکت $s = R\omega t + s_0$

۲- سرعت خطی آن $v = \dfrac{ds}{dt} = R\omega$

۳ - شتاب $\gamma = R\omega^2$

## IX - تغییر دستگاه مقایسه

۲۱ — **تعریف**- مقصود از تغییر دستگاه مقایسه حل این مسئلهٔ کلی است :

**۲۲ - مسئله** - سه جسم صلب A و B و C مفروضند حرکت B نسبت به A وهمچنین حرکت C نسبت به B معلوم است، حرکت C به A راتعیین کنید.

A رادستگاه ثابت و B رادستگاه نسبی مقایسه وحرکتش را نسبت به A کششی وحرکت C را نسبت به B حرکت نسبی ونسبت به A حرکت منتجه مینامند.

**۲۳ - قضیه** - منتجه سرعت حرکت هر نقطه درهر لحظه مجموع هندسی دوسرعت کششی ونسبی آن خواهد بود.

**۲۴ - قضیه** - هرگاه حرکت کششی انتقالی باشد شتاب منتجه مساوی منتجه شتابهای کششی ونسبی است.

## X- حرکت انتقالی

**۲۵ - تعریف** - جسم M نسبت بدستگاه ثابت A دارای حرکت انتقالی است هرگاه هر خط غیر مشخص ازجسم M موازی خط ثابتی از دستگاه A باشد، لذاشرط لازم وکافی برای اینکه جسمی دارای حرکت انتقالی باشد اینست که همیشه دو خط متقاطع آن موازی دو خط ثابت از دستگاه مقایسه باشند.

**۲۶ - قضیه** - وقتی جسمی حرکت انتقالی کند ۱) مسیر تمام نقاطش قابل انطباقند ۲) در هر لحظه سرعت های جمیع نقاطش بردارهای همسنگند ۳) بردارهای شتاب در هر لحظه همسنگند.

## XI - دوران

**۲۷ - تعریف** - هر گاه دو نقطه از جسمی ضمن حرکت نسبت بیکدستگاه مقایسه ثابت بمانند آن جسم حول خط واصل بین آن دو نقطه دوران میکند و آن خط را محور دوران گویند مسیر هریك از نقاط جسم ضمن دوران دایره ایست عمود بر محور دوران - حامل دوران محملش محور دوران وجهتش نسبت بجهت دوران نقاط مثبت و کمیتش مساوی اندازه عددی سرعت زاویه ای یك نقطه جسم در لحظه معین است. سرعت هر نقطه از جسم ضمن دوران در هر لحظه مساوی عزم حامل دوران در آن لحظه نسبت بآن نقطه میباشد.

# علم القوی ( Dynamique )

**تعاریف :**

**۲۸ - علم القوی** یا **دینامیك** در حرکات و علل موجدهٔ آنها بحث میکند.

**۲۹** - چون تعادل اجسام حالت خاصی از حرکت است علم تعادل قوی یا **استاتیك** (Statique) حالت مخصوصی از دینامیك میباشد.

**۳۰ - اصل جبر** Principe de L'inertie (کپلر) - نقطه مادی بخودی خود از سکون بحرکت یا از حرکت بسکون در نمیآید.

**۳۱ - نتیجه** - ۱) اگر نقطه مادی ساکن باشد و

عاملی برآن اثر نکند همواره ساکن میماند.

۲) اگر نقطه مادی متحرك باشد و عاملی بر آن اثر نکند همواره متحرك بوده حرکتش مستقیم‌الخط متشابه‌است.

۳) تغییر وضع نقطه مادی ازحرکت بسکون یا بالعکس دراثر عاملی است که **قوه** نامیده میشود.

۳۲ — اثر قوه بر نقطه‌مادی تولید شتاب در آن میباشد.

۳۳ — همواره بین قوه وارد بر نقطه مادی و شتاب نظیر آن نسبت ثابت $\frac{F}{\gamma} = m$ بر قرار است مقدار این نسبت ثابت m را جرم نقطه مفروض مینامند.

۳۴ — رابطه $\frac{F}{\gamma}=m$ **رابطه اصلی مکانیك** نام‌دارد.

۳۵ — جسمی که در خلاء رها شود بطور قائم بسمت زمین فرود میآید وحرکتش متشابه‌التغییر است. قوه‌ای که باعث این شتاب ثابت‌میشود وزن جسم‌است؛ پس بین P وزن جسم و m جرم آن و g شتاب ثقل این رابطه برقرار است:

$$P = mg$$

۳۶ — بین P و P' وزنهای دوجسم و m و m' جرم‌های آنها در هرنقطه از زمین این رابطه برقرار است:

$$\frac{P}{P'} = \frac{m}{m'}$$

**۳۷ - اصل استقلال آثار قوا (گالیله)** - اثر چند قوه که باهم بریك نقطه مادی وارد شوند نظیر همان اثریست که مجموع هندسی آنها در آن نقطه تولید کند.

**۳۸ - اصل تساوی عمل و عکس العمل** (نیوتن)

هر عملی عکس العملی مساوی و درجهت مخالف با خود ایجاد میکند.

## XIII - تعادل نقطه مادی

۳۹ — نقطه مادی درحال تعادل است وقتی که تحت تأثیر هیچ قوه‌ای نباشد، یا قوائی که بر آن وارد میشوند شتابی در آن ایجاد ننمایند. در این حال اگر نقطه سرعتی داشته باشد مطابق اصل کپلر حرکت آن همیشه مستقیم الخط متشابه است و تعادل چنین نقطه ای را **تعادل دینامیکی** مینامند؛ ولی هرگاه نقطه درلحظه معینی ساکن باشد همیشه ساکن خواهد بود و تعادلش **تعادل استاتیکی** است.

۴۰ — نقطه را **آزاد** گویند وقتیکه بتواند دراثر قوای وارده درجهات مختلف حرکت کند در غیر اینصورت نقطه **غیر آزاد** است.

۴۱ — نقطه غیر آزاد تحت تأثیر دونوع قوه است:

**۱ - قوای مستقیم** (مانند وزن نقطه)

**۲ - قوای وابسته** که بوسیله موانع ایجاد میشوند.

## XIV - استاتیک نقطه آزاد

۴۲ - **قضیه** - شرط لازم و کافی برای تعادل نقطه‌مادی آزادی که تحت تأثیر چند قوه واقع شود اینست که منتجه این قوا صفر باشد. شرط فوق بطریق تحلیلی اینطور بیان میکرد:

اگر ( $X_1$ و $X_2$ و ... $X_n$) و ( $Y_1$ و $Y_2$ و ... $Y_n$)

و ($Z_1$ و $Z_2$ ... و $Z_n$) تصاویر قوا و X و Y و Z تصاویر R منتجهٔ آنها بر سه محور مختصات متعامد باشند شرط تعادل اینست که $R = 0$ یعنی :

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n = 0$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = 0$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = 0$$

**۴۳ - رابطه استون (Stévin)** - برای اینکه نقطه مادی در تحت تأثیر سه قوه بحال تعادل باشد لازم و کافی است که :

۱ - هرسه قوه دریك صفحه باشند.

۲ - هر کدام خارج زاویه دو قوه دیگر قرار گیرد.

۳ - مقدار هر یك متناسب با جیب زاویه بین دو قوه دیگر باشد یعنی:

$$\frac{F_1}{sin(F_2 و F_3)} = \frac{F_2}{sin(F_3 و F_1)} = \frac{F_3}{sin(F_1 و F_2)}$$

## XV - استاتیك نقطه غیر آزاد

۴۴ — هر گاه نقطه‌ای در تحت تاثیر قوای چندی که بر آیند آنها R باشد بریك سطح یا یك منحنی تغییر مکان دهد ممکن است : ۱) فقط بتواند برسطح یا منحنی تغییر مکان دهد ولی از آن نتواند جدا شود ؛

۲) بر سطح متکی باشد ، یعنی بتواند از یکجهت از سطح جدا شود ؛ در اینصورت اثر R فقط آنستکه نقطه‌را بر روی سطح نگاهمیدارد.

۴۵ — **فشار وعکس العمل** — نقطه غیر آزاد M در تحت تاثیر R برآیند قوای وارد بر آن ، بر سطح یا منحنی عملی مساوی R بنام **فشار** وارد میآورد وسطح یا منحنی در مقابل برنقطه M فشارمتقابلی مانند R' موسوم به **عکس-العمل** وارد میسازد. **عکس العمل قوه‌ایست وابسته.** R' مساوی R ودرجهت مخالف آنست.

۴۶ — **اصطکاک** — ۱) ممکنست سطح یا منحنی کاملا صیقلی (بی اصطکاک) باشد. R' و R بر آن عمودند.

۲) ونیز ممکنست خشن (بااصطکاک باشند) ، در اینصورت R' و R باآن زاویه‌ای میسازند ،مقدار این زاویه بستگی با درجه خشونت ( اصطکاک ) جسم دارد. $\theta$ زاویه R' و R با سطح یا منحنی را **زاویه اصطکاک** و $tg\theta$ را **ضریب اصطکاک** میگویند.

۴۷ - مخروطی که رأسش نقطه مادی واقع بر سطح و محورش عمود برسطح وزاویۀ رأسش دوبرابر زاویه اصطکاک باشدبه **مخروط اصطکاک** معروف است.

۴۸ — **قضیه** - شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌مادی واقع برسطح یا منحنی بی‌اصطکاک بحال تعادل باشد آنست که R ، منتجۀ قوای وارد، برسطح یا منحنی عمود بوده و نقطه را بر آن بچسباند.

**۴۹- قضیه** - شرط تعادل نقطه مادی واقع برسطح یا منحنی با اصطکاك آنست که زاویه بین R برآیند قوا و قائم برنقطه اززاویه اصطکاك کوچکتر باشد یا بعبارت دیگر منتجه قوا داخل مخروط اصطکاك ویا منطبق بر سطح آن باشد.

**۵۰ - قوانین اصطکاك (Coulomb) :**

۱- قوه اصطکاك حد با فشار قائم متناسب است.

۲- قوه اصطکاك بوسعت سطح اتکا بستگی ندارد.

۳- قوه اصطکاك بجنس سطح ومیزان صیقلی بودن آن و ماده‌ای که سطح را بآن اندوده باشند بستگی دارد.

## XV - دینامیك نقطه

۵۱- موضوع دینامیك تعیین روابط بین قوه وشتاب و سرعت وکار است.

۵۲ - اثر قوه تولید شتاب است درمتحرك. شتاب باعث تغییر سرعت است.

**۵۳ - دستورهای اصلی دینامیك** - اگر X و Y و Z تصاویر قوه F بر سه محور و $\frac{d^2x}{dt^2}$ و $\frac{d^2y}{dt^2}$ و $\frac{d^2z}{dt^2}$ تصاویر شتاب بر آنها باشند.

$$F = m\gamma ؛ X = \frac{md^2x}{dt^2} ; Y = \frac{md^2y}{dt^2} ; Z = \frac{md^2z}{dt^2}$$

بکمك دستورهای اصلی دینامیك میتوان این دو مسئله را حل کرد :

۱) تعیین حرکتی که نقطه‌ای بجرم m تحت تأثیرقوه F انجام میدهد.

۲) تعیین قوه‌ای که موجب حرکت معینی برای نقطه‌ای بجرم m میشود.

## XVII - حرکت نقطه‌مادی آزاد

**۵٤ — اولاحرکت‌دراامتداد قائم - ۱** - اگر جسمی بجرم m ازمبداءO واقع برامتدادقائم با سرعت اولیه $v_0$ در خلاءرها شده باشد تنها قوه‌ای که بر آن وارد میشود وزن آن یعنی mg است ومسیرحرکت همان امتداد قائم خواهد بود.

**۲ -- قوانین حرکت** - اگر جهت ازپائین ببالا مثبت فرض شود:

$$z = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$$

$$v = -gt + v_0$$

$$\gamma = -g$$

۳ - اگر $v_0 < 0$ باشد حرکت ازبالا بپائین و معکوس ومسرعه است.

٤ - اگر $v_0 > 0$ باشد حرکت ازپائین ببالا ودرفاصله زمانی $t < \frac{v_0}{g}$ مستقیم و مبطئه است و متحرك بازاء $t = \frac{v_0}{g}$ در فاصله $\frac{v_0^2}{2g}$ به اوج میرسد وپس ازآن حرکت معکوس ومسرعه میشود.

۵ - درهر نقطه ازمسیر متحرك دارای دو سرعت‌قرینه

$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gz}$ میباشد که یکی سرعت صعود و دیگری سرعت نزول است.

۶ - زمان صعود تا هر نقطه از مسیر مساوی زمان برگشت از آن نقطه بمحل اولیه میباشد.

## ۵۵ — ثانیاً حرکت سهمی شکل

۱ — اگر جسمی بجرم m در مبداء زمان ($t = 0$) از مبداء O با سرعت اولیه $v_0$ در امتدادیکه با افق زاویه $0 < \alpha < 90°$ دارد در خلاء پرتاب شده باشد تنها قوه‌ایکه بر آن وارد میشود وزن آن خواهد بود و مسیر حرکت منحنی مسطحی است که در صفحه قائم xOz قرار دارد.

## ۲ — قوانین حرکت

تصاویر بر محور Oz قائم

$$\begin{cases} \gamma_z = \dfrac{d^2 z}{dt^2} = -g \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \\ z = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t \end{cases}$$

تصاویر بر محور Ox افقی

$$\begin{cases} \gamma_x = \dfrac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \\ x = v_0 \cos\alpha \cdot t \end{cases}$$

## ۳ — معادله سهمی مسیر

$$z = \frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + tg\alpha \cdot x$$

**۴ ـ ارتفاع نقطه اوج وزمان رسیدن به‌آن**

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

**۵ ـ برد یامیدان حرکت:** $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

**٦ ـ هدگراف (بمبداء O)**

خط $x = v_0 \cos\alpha$ (موازی Oz)

۷ ـ دوفاصله $t < \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ حرکت مبطئه، در آن لحظه سرعت می‌نیمم و مساوی $v_0 \cos\alpha$ وپس از آن حرکت مسرعه میباشد.

۸ ـ درهر نقطه بارتفاع z : $|v| = \sqrt{v_0^2 - 2gz}$

۹ ـ پارامترسهمی $\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$ و فاصله هادی از مبداء $\frac{v_0^2}{2g}$ است

۱۰ ـ معادله سهمی اطمینان :

$$z = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

## XVIII ـ حرکت نقطه مادی غیر آزاد

**۵٦ ـ حرکت بی اصطکاک** ـ نقطه M روی یك منحنی صیقلی تحت تأثیر قوهٔ R وعکس العمل R' تغییر مکان میدهد: تصویر R برقائم برصفحه درامتداد R' است وخنثی میشودوفقط تصویر R برمماس برسطح است که M را بحرکت در میاورد.

اگر تصویر R بر مماس را $R_t$ بنامیم : بموجب رابطهٔ $F = m\gamma$ :

$$R_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

این رابطه را معادلهٔ اصلی Intrinséque حرکت میگویند .

۵۷- **حرکت با اصطکاک** -دراین صورت عکس العمل $R'$ با سطح زاویه $\theta$ (زاویه اصطکاک) میسازد وقوای مؤثر بر نقطه عبارتست از برآیند تصاویر R و $R'$ بر مماس بر سطح . پس ؛

$$R_t + R'_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

۵۸ - **مثال : حرکت نقطه برسطح مورب** - اگر زاویه سطح مورب را با افق $\alpha$ و سرعت اولیه حرکت را $v_0$ بنامیم:

۱) **بی اصطکاک** : اگر $v_0 = 0$ باشد

$$\gamma = g\sin\alpha \text{ ؛ } v = g\sin\alpha t \text{ ؛ } x = \frac{1}{2} g\sin\alpha \cdot t^2$$

هرگاه $v_0$ صفر نباشد

$$\gamma = g\sin\alpha \text{ ؛ } v = g\sin\alpha t + v_0$$

$$x = \frac{1}{2} g\sin\alpha t^2 + v_0 t$$

هرگاه $v_0 < 0$ باشد(طرف بالا منفی فرض میشود)حرکت تازمان $t = \frac{v_0}{g\sin\alpha}$ مبطئه ( روببالا ) واز آن پس مسرعه ( رو

بپائین) خواهد بود .

## ۲ - با اصطکاک

زاویه اصطکاک را ضمن حرکت $\theta$ فرض میکنیم نقطه M تحت تأثیر وزن خود($mg$) و عکس العمل $R'$ میباشد ؛

۱ ) حرکت بطرف پائین: $v_0 > 0$ - قوانین حرکت عبارتند از :

$$v = g\frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos\theta}t + v_0 \ , \ \gamma = \frac{g\sin(\alpha - \theta)}{\cos\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}g\frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos\theta}t^2 + v_0 t$$

موقعیکه $\theta > \alpha$ میباشد اگر $v_0 = 0$ باشد نقطه بحال تعادل خواهد ماند و اگر $v_0 > 0$ باشد تا زمان $\frac{v_0 \cos\theta}{g\sin(\theta - \alpha)}$ حرکت مستقیم مبطئه و از این ببعد متحرك در فاصلهٔ $x_1 = \frac{v_0^2 \cos\theta}{2g\sin(\theta - \alpha)}$ بحال تعادل خواهد ماند .

موقعیکه $\theta = \alpha$ میباشد اگر $v_0 = 0$ باشد نقطه بحال تعادل خواهد ماند و اگر $v_0 > 0$ باشد حرکت متشابه میشود .

موقعیکه $\theta < \alpha$ باشد حرکت متشابه التغییر مسرعه است .

۲ ) حرکت بطرف بالا: $v_0 > 0$ - قوانین حرکت عبارتند از :

$$v = g\frac{sin(\alpha+\theta)}{cos\theta}t + v_0 \quad و \quad \gamma = g\frac{sin(\alpha+\theta)}{cos\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{g(sin a + \theta)}{cos\theta}t^2 + v_0 t$$

تا زمان $t = \frac{v_0 cos\theta}{ysin(\alpha+\theta)}$ حرکت معکوس و مبطئه و در

این زمان متحرك بفاصله $x_1 = \frac{-v_0^2 cos\theta}{2gsin(\alpha+\theta)}$ قرار داشته و از این

ببعد حرکت وضع حالت اول (شماره ۴۹-۱) را بخود میگیرد

## XIX ـ گار

۵۰ ـ اگر نقطه مادی M دراثر نیروی F و در امتداد F تغییر مکانی مساوی 'DD دهد کاری مساوی $T=(DD')(F)$ انجام شده است .

۶۰ ـ هرگاه $\alpha$ زاویهٔ بین حامل F وامتداد 'DD باشد کار عبارت خواهد بود از : $T = F . DD' . cos\,(F\ و\ DD')$

این کار مثبت است هرگاه $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$ یا

$\frac{3\pi}{2} > \alpha$ باشد و آنرا **کار محرك** نامند ومنفی است وقتی

که $\frac{3\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{2}$ باشد و آنرا **کار مقاوم** نامند ؛ اگر

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ یا $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ باشد کار صفر است .

## XX ـ قوه حیه (Force vive)

۶۱ ـ **تعریف** ـ فرس و یو یا قوه حیه یك نقطه مادی بجرم

m که با سرعت v حرکت کند عبارتست از $mv^2$

۶۲ - نصف فرس‌ویو ($\frac{1}{2} mv^2$) راانرژی حرکتی نقطه گویند. énèrgie cinétique

۶۳ - **قضیه** - تغییرات انرژی حرکتی یك نقطه مادی متحرك بین دو نقطه $t_0$ و t مساویست با حاصل جمع کارهای قوای وارد بر نقطه بین این دو لحظه.

## XXI - استاتیك جسم صلب

۶۴ - قوای وارد بر جسم صلب عبارتند از: ۱) قوای خارجی ۲) قوای درونی.

۱) قوای خارجی از نقاط مادی خارج از جسم ناشی میشوندوخودبدو قسمت میشوند: ۱) قوای مستقیم ۲) قوای ارتباطی خارجی.

۲) قوای درونی ازاعمال متقابل نقاط خود جسم ناشی میگردند و عبارتند از عکس‌العمل های ملکولی و قوای ارتباطی داخلی.

۶۵ - جسم صلب را در حال **تعادل استاتیکی** گویند وقتیکه اگر آنرا بدون سرعت اولیه بحال خود گذارند دراثر قوای وارد بر آن نسبت بدستگاه مقایسه بیحرکت بماند.

۶۶ - شرط لازم برای اینکه جسمی درحال تعادل باشد آنست که (OR) مجموع هندسی قوای خارجی وارد بر آن و(OG) منتجه عزم این قوا صفر باشد یعنی: $(OR) = 0$ و $(OG) = 0$

۶۷ - **تعادل دستگاهها** - دو دستگاه قوا متعادلند وقتیکه اثر آنها دریك جسم یکسان باشد .

۶۸- **قضیه**- شرط لازم برای تعادل دو دستگاه قوا آنست که مجموع هندسی آنها باهم و منتجهٔ عزمشان نسبت بنقطه غیر مشخصی باهم مساوی باشند یعنی $(OR')=(OR)$ و $(OG')=(OG)$ این شرایط برای اجسامیکه تغییر شکل نمیدهند لازم و کافی است .

## XXII - اعمال مقدماتی

همیشه میتوان بوسیله اعمالی بنام اعمال مقدماتی دستگاه قوائیرا بدستگاهی دیگر معادل باآن تبدیل نمود . این اعمال عبارتند از :

۱- لغزاندن قوه برمحمل آن .

۲- تبدیل چند قوه متقارب بمجموع هندسی آنها و بعکس تجزیه یك قوه بمؤلفه‌های خود .

۳- اضافه یا کسر نمودن دو قوه متقابل.

۶۹ - بوسیله اعمال مقدماتی دستگاه قوای وارد بر جسم را بدستگاهی معادل با آن که مؤلفات کمتری داشته باشد تبدیل میکنند و از این راه حالت و وضع حرکت جسم را تعیین مینمایند .

۷۰-**مختصات مرکز قوای موازی**-اگر بچند نقطه مادی $A_1$ و $A_2$ و .... و $A_m$ ازیك جسم بترتیب قوائی موازی

یکدیگر با مقادیر جبری $F_1$ و $F_2$ و ... و $F_n$ وارد شوند و مختصات نقاط مذکور نسبت به سه محور متعامد $A_1(x_1, y_1, z_1)$ و $A_2(x_2, y_2, z_2)$ و ... و $A_n(x_n, y_n, z_n)$ ومختصات مرکز این قوا x و y و z باشند :

$$x = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n} = \frac{\Sigma F_n x_n}{\Sigma F_n}$$

$$Y = \ldots = \frac{\Sigma y_n F_n}{\Sigma F_n} \quad \text{و}$$

$$Z = \ldots = \frac{\Sigma z_n F_n}{\Sigma F_n}$$

وقتی قوای مزبور با یکدیگر مساوی باشند مختصات مرکز آنها چنین میشود :

$$x = \frac{\Sigma x_n}{n} \text{ و } y = \frac{\Sigma y_n}{n} \text{ و } z = \frac{\Sigma z_n}{n}$$

۷۱ - **قضیه** - همیشه ممکن است قوای وارد بر جسمی را بسه قوه که نقاط اثرشان سه نقطه دلخواه واقع بر یک استقامت باشند تبدیل نمود.

۷۲ - **قضیه** - ممکن است قوای وارد برجسمی را بسه قوه که یکی از آنها بر نقطه اختیاری معینی وارد شود تبدیل نمود.

## XXIII - مرکز ثقل

۷۳ - **تعریف** - اوزان نقاط مادی یک جسم قوای

متوازی قائمی هستند که مرکز آنها مرکز ثقل جسم (G) است و منتجه آنها برداریست قائم که بر نقطه G میگذرد.

۷۴ - مختصات مرکز ثقل - اگر $m_1$ و $m_2$ و ... و $m_n$ بترتیب جرمهای نقاط مادی $A_1$ و $A_2$ و ... و $A_n$ جسمی باشند و هریك از نقاط فقط تحت تأثیر قوای حاصل از وزن خود قرار گیرند مختصات مرکز ثقل جسم مزبور نسبت به محور متعامد عبارتند از:

$$X=\frac{m_1 x_1+m_2 x_2+\ldots+m_n x_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

$$Y=\frac{m_1 y_1+m_2 y_2+\ldots+m_n y_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

$$Z=\frac{m_1 z_1+m_2 z_2+\ldots m_n z_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

۷۵ - اجسامی که شکل آنها ثابت است اگر هم محلشان تغییر کند یا از وضع اولیه منحرف شوند مرکز ثقلشان تغییر نمیکند.

۷۶ - جسمی را متشابه الاجزاء گویند اگر هر دو جزء متساوی الحجم از آن متساوی الجرم باشند.

۷۷ — **قضیه** - شکلی که دارای مرکز یا محور یا (سطح تقارن است مرکز ثقلش براین مرکز یا محور یا سطح تقارن قرار دارد.

۷۸ - یك شكل مستوی (یا یك جسم) دارای یك قطر یا یك صفحه قطری) وابسته بامتداد △ است وقتی که جمیع نقاط

آن شکل مستوی (یاجسم) را بتوان بدودسته چنان تقسیم نمود که خط واصل بین هر نقطه یکدسته و نقطه نظیرش دردسته دیگر موازی امتداد △ بوده ووسطش بر آن قطر (یاصفحه قطری) واقع گردد.

۷۹-**قضیه**-شکلی که دارای قطر یا صفحه قطری نظیر امتدادمعینی باشد (۷۸) مرکز ثقلش براین قطر یاصفحه‌قطری قراردارد.

۸۰ - **مرکز ثقل قطعه خط مستقیم** - نقطه وسط آن است.

۸۱- **مرکز ثقل محیط مثلث** - مرکز دائره‌محاطی مثلثی است که از وصل‌مواقع میانه‌های آن بدست میآید

۸۲- **مرکز ثقل سطح مثلث**- نقطه تلاقی سه میانه آن است.

۸۳- **مرکز ثقل چهارضلعی** - نقطه تلاقی دو خط واصل‌بین مراکز ثقل‌چهارمثلثی‌است که بترتیب ازدو ضلع متقاطع چهارضلعی ویك قطرتشکیل‌میشود.

۸۴-**مرکز ثقل ذوزنقه‌ای** بقواعد B و b و مرکز ثقل G بفرض اینکه H و H' مواقع عمودهای مرسوم ازG بر دوقاعده باشند ازاین رابطه بدست میآید:

$$\frac{GH}{GH'}=\frac{B+۲b}{۲B+b}$$

۸۵- **مرکز ثقل متوازی الاضلاع**- محل تلاقی دوقطر آنست.

۸۶ — **مرکز ثقل کثیر الاضلاع منتظم** — مرکز آن است.

۸۷ — **مرکز ثقل دایره** — مرکز دایره است.

۸۸ — **مرکز ثقل منکسر منتظم** بطول l و شعاع دایره محیطی R و وتر منتجهٔ C ازاین رابطه بدست میآید:

$$OG = \frac{R \cdot C}{l}$$

۸۹ — **مرکز ثقل قوس دایره** مقابل بوتر AB از دایره‌ای بمرکز O و بشعاع R ازاین رابطه بدست میآید:

$$GO = \frac{R \cdot AB}{\text{قوس}\,AB}$$

۹۰ — **مرکز ثقل بیضی** - محل تلاقی دوقطر آنست.

۹۱ - **مرکز ثقل قطاع دایره** بشعاع R و مرکز o منطبق بر مرکز ثقل قوسی از دایره به شعاع $\frac{۲}{۳}R$ و بهمان مرکز o میباشد اگر α نصف زاویه مرکزی قطاع باشد:

$$OG = \frac{۲}{۳} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

۹۲ - **مرکز ثقل سطح نیمدایره** برروی شعاع عمود برقطر و بفاصله $OG = \frac{۴R}{۳\pi}$ ازمرکز دایره قراردارد.

۹۳ — **مرکز ثقل متوازی السطوح** نقطه تلاقی سه قطر آنست.

**۹۴- مرکز ثقل هرم ومخروط** برمرکز ثقل مقطع صفحه‌ای در آن که بفاصله $\frac{۱}{۴}$ ارتفاع ازقاعده بموازات قاعده رسم شده باشد واقع است.

**۹۵- مرکز ثقل هرم مثلث القاعده** - روی خط واصل بین رأس ومرکز ثقل قاعده‌اش وبفاصله $\frac{۳}{۴}$ ازرأس قراردارد.

**۹۶- مرکز ثقل منشور و استوانه** - محل تقاطع خط واصل بین مراکز دو قاعده با مقطع متوسطش میباشد.

**۹۷ - مرکز ثقل منشور مثلث القاعده** بروسط خط واصل بین مراکزثقل دوقاعده‌اش قراردارد.

**۹۸- مرکز ثقل کره** برمرکز آن منطبق است.

**۹۹- قضیه گولدن** (Guldin) -۱) سطح حاصل از دوران یك خط مستقیم L ازیك سطح معینی حول یك خط از همان سطح که L را قطع نکند مساویست با طول L ضرب درطول محیط دایرهٔ حاصل ازدوران مرکز ثقل L.

۲) حجم حاصل ازدوران سطح S حول خطی از همان سطح مساویست با حاصلضرب S درطول محیط دایرهٔ حاصل ازدوران مرکزثقل S.

## XXIV — شرط تعادل جسم صلب آزاد

**۱۰۰- قضیه** — شرط لازم وکافی برای آنکه آزادی صلب تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که مجموع

هندسی قوای مزبور صفر و منتجه عزمهای آنها نسبت بهر نقطه صفر باشد.

**۱۰۱ — بیان شرط تعادل بطریق تحلیلی —** اگر منتجه تصاویر قوای وارده بر جسم روی سه محور متعامد بترتیب X و Y و Z و تصاویر منتجه عزم آنها بر سه محور L و M و N فرض شوند موقعی جسم بحال تعادل است که:

$$OG=\cdot\begin{cases}L=\cdot\\M=\cdot\\N=\cdot\end{cases}\qquad OR=\cdot\begin{cases}X=\cdot\\Y=\cdot\\Z=\cdot\end{cases}$$

## XXV — شرط تعادل جسم صلب غیر آزاد

۱۰۲ - شرط لازم و کافی برای آنکه جسم صلب غیر آزاد تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که منتجه قوای مستقیم و عکس العملهای جسم از یك طرف و عزم آنها نسبت بنقطه ثابتی از طرف دیگر مساوی صفر باشد.

**۱۰۳ - قضیه -** شرط لازم و کافی برای آنکه جسمی که حول محوری ثابت بدون اصطکاك دوران مینماید در تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد اینست که عزم قوای وارده نسبت باین محور صفر باشد

**۱۰۴ - قضیه -** شرط لازم و کافی برای تعادل جسمی که حول نقطه ثابت O حرکت بدون اصطکاك دارد اینست که منتجه عزم قوای وارده نسبت باین نقطه صفر باشد.

**۱۰۵ - قضیه -** شرایط لازم و کافی برای تعادل جسمی که درحین دوران حول محوری برروی آن بلغزد اینست که

مجموع تصاویر قوای وارده براین محور و همچنین عزمهای قوا نسبت بآن صفر باشد .

۱۰۶- **کثیر الاضلاع اتکاء** -ازوصل نقاط اتکاء یك جسم بر یك سطح کثیر الاضلاعی بدست میآید موسوم به کثیرالاضلاع اتکاء .

۱۰۷- **قضیه** - شرط لازم و کافی برای تعادل جسم متکی برسطح صیقلی آنست که منتجه قوای وارده قائم برسطح بوده وجسم را برسطح متکی نماید و ضمناً داخل کثیر الاضلاع اتکا باشد .

## XXVI — ماشینهای ساده

۱۰۸- **تعریف** - ماشینهای ساده دستگاههائی هستند که هر نقطه ازآنها برمنحنی مشخص وثابتی حرکت میکند و چون ارتباطات کاملی بین اجزاء مختلفه آنها هست با مشخص بودن وضع یك نقطه بر مسیرش میتوان اوضاع سایر نقاط دستگاه رامعلوم ساخت .

۱۰۹- ماشینهای ساده واسطه بین دو نوع قوه میباشند یکی قدرت (قوای محرك) ودیگری مقاومت. دستگاه وقتی بحال تعادل است که قدرت ومقاومت دستگاهی معادل تشکیل دهند .

### اهرمها

۱۱۰ — تعریف — اهرم جسمی است که حول نقطه ثابتی موسوم بنقطه اتکاء میتواند حرکت کند. طول عمودهائیکه از نقطه اتکاء بر امتداد قدرت یا مقاومت وارد شوند بازوی

قدرت یا مقاومت نام‌دارند .

۱۱۱ — شرط تعادل اهرم آنست که عزم قوای وارد بر آن نسبت بنقطه اتکاء صفر باشد . یعنی $Pa=Rb$ ( $P$ قدرت و $R$ مقاومت و $a$ و $b$ طولهای بازوی قدرت و مقاومتند ) یا بعبارت دیگر قدرت و مقاومت دارای منتجه‌ای باشند که از نقطهٔ اتکاء بگذرد .

۱۱۲ — فشار بر نقطه‌اتکاء منتجهٔ دو قوهٔ قدرت و مقاومت است یعنی :

$$R = \sqrt{P^{۲} + Q^{۲} + ۲PQ\cos(P, Q)}$$

پس فشار وقتی ماکزیمم است که قدرت و مقاومت موازی باشند . دراینموقع فشار مذکور $P+Q$ خواهد بود .

۱۱۳ — **انواع اهرم** — اهرم برسه‌نوع است :

۱ — اهرم نوع اول که در آن نقطه اتکاء بین قدرت و مقاومت واقع است . مانند ترازو و قیچی .

۳ - اهرم‌نوع دوم که در آن مقاومت بین قدرت و نقطه اتکاءاست . مانندیك‌چرخه (چرخ رفتگران) و تلمبه .

۳ — اهرم نوع سوم که در آن قدرت بین مقاومت و نقطه اتکاءقراردارد . مانند چرخ چاقو تیز کنی .

## چرخ چاه

۱۱٤ - **تعریف** — چرخ چاه‌ازاستوانه دواری تشکیل‌شده است‌موسوم به‌تنه چرخ ودرطرفین آن‌دو استوانه کوچکتر که محورشان بر محور تنه چرخ منطبق است و بر پایهٔ ثابتی

قرار دارند.

۱۱۵ — شرایط تعادل چرخ چاه آنست که اولا قوای محرک ومقاوم چرخ را در دوجهت مخالف حرکت دهند ثانیاً مقدار آنها متناسب با نسبت عکس شعاع چرخ (یا طول دسته) و شعاع تنه باشد یعنی:

$$\frac{P}{Q}=\frac{r}{R}$$ ( P و Q قوای محرک ومقاوم و R و r اشعه چرخ وتنه میباشند)

۱۱۶ — **انواع چرخ چاه** - چرخ چاه بردونوع است:

۱- چرخ چاه معمولی که محور آن افقی است و چرخ محرک تبدیل بدستهٔ خمیده ای شده که متصل باستوانه میشود.

۲ — چرخ چاه معدنی که چرخ محرک آن بزرك وبشعاع تقریباً ۳٫۵ متر است ودر کنار این چرخ نردههائی استکه اگر شخصی روی آنها حرکت کند وزن اوچرخ را بحرکت درمیآورد وچرخ دوران میکند.

## کریك یا جك (Cric)

۱۱۷ - تعریف - اسبابی است که برای بلند کردن بار های سنگینی بارتفاع کم بکار میرود و آن عبارتست از یك محور قائم دندانه‌دار که بوسیله چرخ دندانه‌داری که حول محور افقی میگردد بالا وپائین میرود.

۱۱۸- شرط تعادل جك: $$\frac{P}{Q}=\frac{r}{R}$$ ( P و Q

قدرت ومقاومت و R و r طول دسته گرداننده و شعاع چرخ دندانه دار است)

## قرقره

۱۱۹ - **تعریف** - استوانه ایست فلزی یا چوبی که حول محور خود میتواند دوران کند بطرفین محور دوشاخه‌ای متصل است که اگر آنرا بوسیله قلابی بنقطه ثابتی بیاویزند قرقره را **ثابت** والا **متحرك** نامند.

۱۲۰ - **شرط تعادل قرقره ثابت** - شرط لازم و کافی برای تعادل آنست که مجموع عزم قوای p و Q نسبت بمحور قرقره صفر باشد (ازاصطکاك صرفنظر میشود).

۱۲۱- **قرقره متحرك** - در این نوع قرقره باری را که باید بلند نمایند بقلاب دوشاخه قرقره آویزان نموده ویك سرطنابی را که ازروی قرقره وداخل دوشاخه میگذرد بنقطه ثابتی وصل نموده وقدرت را بسر دیگر طناب وارد میآورند.

۱۲۲- شرط تعادل درقرقره متحرك آنست که عزم قوای وارده نسبت به نقطه o (مرکز دائره قرقره) صفر باشد.

۱۲۳-از اجتماع چندقرقره **موفل** (Moufle) تشکیل میشود. واجتماع دوموفل همنوع را **پالان** (Palan) مینامند. اگر P قدرت و R مقاومت و n عده قرقره ها فرض شود شرط تعادل پالان اینست که: $P = \frac{R}{2n}$

# آحاد مهم علمی که در ریاضیات متداولست

| واحدها | دستگاه C.G.S | دستگاه M.K.S | توضیحات |
|---|---|---|---|
| **آحاد اصلی** | | | در دستگاه M.K.S یا دستگاه متری آحاد اصلی عبارتند از : متر ( طول ) ، ثانیه ( زمان ) و کیلوگرم (قوه) |
| طول | سانتیمتر | متر | |
| جرم | گرم | تن | |
| زمان | ثانیه | ثانیه | رادیان= قوسی ازدایره مساوی طول شعاع آن |
| **آحاد مشتق** | | | دین= قوه‌ای که بجرم یك گرمی شتاب یکسانتیمتر در ثانیه بدهد . |
| سطح | سانتیمتر مربع | متر مربع . | استن = $(۱۰)^{۸}$ دین |
| حجم | » مکعب | » مکعب | ارگ= کاریك دین دریك سانتیمتر |
| زاویه | رادیان | رادیان | ژول= $(۱۰)^{۷}$ ارگ<br>وات= ژول در ثانیه |
| قوه | Dyne | Sthène | پیز = $۱۰^{۵}$ باری |
| کارونیرو | Erg | کیلوژول | باری= دین برسانتیمتر |
| قدرت | ارك درثانیه | وات | کالری کوچك= مقدار حرارتی که یك گرم آبرا یك درجه گرمتر کند . |
| فشار | Bary | Pièze | کالری بزرك= ۱۰۰۰ کالری کوچك |
| مقدار حرارت | کالری کوچك | Thermie | ترمی= ۱۰۰۰ کالری بزرك |

# هیئت

## I — کلیات

۱ — **کره سماوی** یا **فلك** کره موهومی است که مرکزش یك نقطه اختیاری از زمین وشعاعش نامحدود است و کواکب درسطح داخل آن قرار گرفته اند .

۲ — **خط قائم** هر نقطه عبارت از امتداد قوهٔ ثقل در آن نقطه است که موازی امتداد شاغول میباشد ( محور بدن هر شخص در روی زمین امتداد قائم را نشان میدهد) .

۳ — **سمت الرأس و سمت القدم** نقاط تلاقی خط قائم هر نقطه‌اند با کرهٔ سماوی ، آنکه در بالاست سمت راس و دیگری سمت‌قدم میباشد .

٤ — **سطح قائم** هر نقطه هر سطحی است که برخط قائم بگذرد .

٥ — **محور عالم** خط موهومی است که کرهٔ سماوی بدور آن میگردد .

٦ — **قطبین عالم** دو نقطه برخورد محور عالم با کرهٔ سماوی هستند . آنکه درنیمکره شمالی است **قطب شمال** ودیگری **قطب جنوب** است (قطب شمال در حدود صورت فلکی بنام خرس کوچك (دب اصغر) و مجاورت **ستاره جدی** و قطب جنوب درحوالی صورت فلکی بنام **صلیب جنوبی** واقعند) .

۷ — **نصف النهار** هر نقطه سطح قائمی است که بر محور عالم میگذرد.

۸ — **سطح افق** هر نقطه سطحی است که از آن نقطه بر خط قائم همان نقطه عمود شود.

۹ — **استوای فلکی** یا **معدل النهار** دایره عظیمه‌ای از کره سماویست که عمود بر محور عالم است.

۱۰ — **مدارات** دوایر کوچکی از کرهٔ فلکی موازی معدل النهار میباشند.

۱۱ — **دائرهٔ ساعتی** یا **نصف النهار** هر کوکب دایره ایست که بر این کوکب و محور عالم میگذرد.

۱۲ — **زاویه ساعتی** هر کوکب در هر لحظه قوسی است از معدل النهار محصور بین دایرهٔ ساعتی آن کوکب و نصف‌ـ النهار مکان.

۱۳ — **حرکت یومی** - هر کوکب در ۲٤ ساعت یکبار حول محور عالم میگردد. چون کواکب ظاهرا بر سطح کرهٔ سماوی قرار دارند بنظر میرسد که کرهٔ سماوی در ۲٤ ساعت یکبار حول محور خود از مشرق بمغرب دوران میکند. این حرکت ظاهری را حرکت یومی میگویند. مسیر هر کوکب بر یکی از مدارات است.

۱٤ — **دایرة البروج** یا **دایرهٔ خسوف و کسوف** دایره عظیمه ایست که زمین در یکسال حول خورشید میپیماید و سطح آن با معدل النهار زاویه $23°27'5''$ تشکیل میدهد.

۱۵ — **نقاط اعتدال** عبارتند از دو نقطه تلاقی دایرة البروج بامعدل النهار . آنرا که زمین درموقع رفتن از نیمکره جنوبی بنیمکرهٔ شمالی از آن میگذرد **نقطه اعتدال بهاری** (ربیعی) میگویند و $\gamma$ نام میگذارند ، دیگری را که زمین دوموقع رفتن از نیمکره شمالی به نیمکرهٔ جنوبی از آن میگذرد **نقطه اعتدال پائیزی** (خریفی) و $\gamma'$ مینامند .

۱۶ — **نقاط انقلاب** دو نقطه ازدایرة البروجند که هریك بفاصله ۹۰ درجه از نقاط اعتدال قرار دارند. آنکه در نیمکره شمالی است بنقطه **انقلاب تابستانی یاصیفی** و دیگری که در نیمکره جنوبی است بنقطه **انقلاب زمستانی یاشتوی** موسوم است .

۱۷- **جهت مستقیم وجهت معکوس** - اگر شخصی برمحور عالم قرار گیرد و سر او متوجه شمال باشد هرحرکت که از طرف راست بچپ او انجام گیرد درجهت مستقیم است و درجهت دیگر ، یعنی ازچپ براست ، **درجهت معکوس** .

۱۸ -- **قطرظاهری** هر کوکب بشعاع R که بفاصله d از ناظر واقع باشد زاویه $\alpha$ حادث بین اشعه بصری محدود بدو انتهای قطر کوکب میباشد .

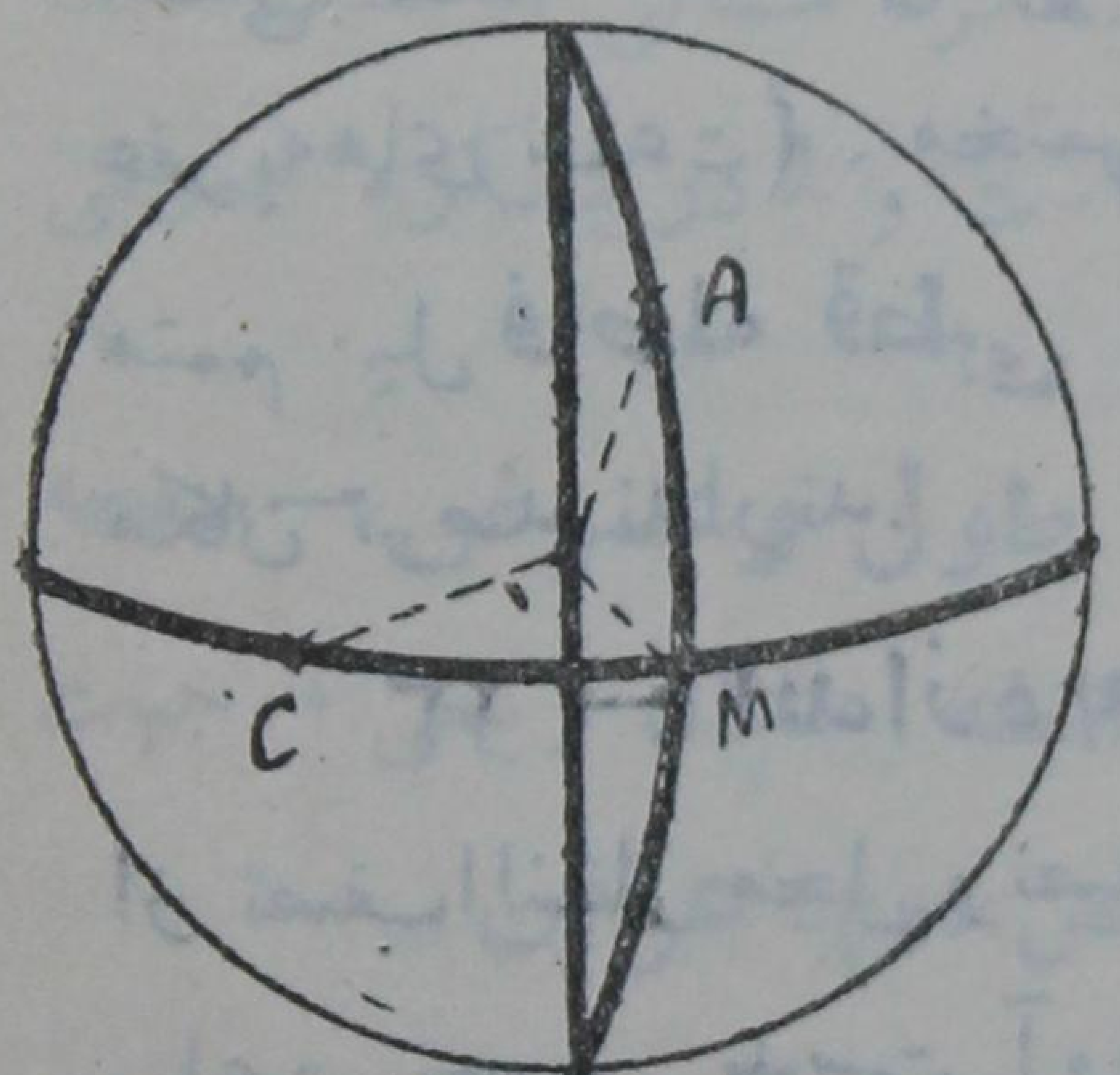
پس $$\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R}{d}$$

وچون قطر ظاهری بسیار کوچك است وجیب زاویه با خود آن مساویست : $\alpha = ۲\frac{R}{d}$

## II - مختصات کروی

۱۹ - برای مشخص ساختن وضع یك نقطه A بر روی کره سماوی از مختصات کروی استفاده میشود.

در هر دستگاه مختصات کروی دایره عظیمه‌ای بنام **صفحهٔ اصلی** در نظر گرفته میشود و در روی آن نقطه C را بنام مبداء اختیار مینمایند. آنگاه بر نقطه مفروض A و محور عمود بر صفحه اصلی دایره عظیمه دیگری میگذرانند تا دایره اصلی را در M قطع کند. دو قوس CM و AM مختصات نقطه A هستند که اولی از ۰ تا ۳۶۰ در جهت مستقیم یا معکوس و دومی از ۰ تا ۹۰ در جهت مثبت یا منفی اندازه گرفته میشوند (ش۱)




**۲۰ - دستگاه مختصات افقی (مختصات سمتیه): سمت و ارتفاع** -- صفحه اصلی صفحه افق و نقطه اصلی محل تلاقی افق با سطح قائم ثابتی بنام سطح قائم اصلی میباشد. مختص اول را **سمت** و مختص دوم را **ارتفاع** میگویند. سمت در جهت معکوس اندازه گرفته میشود.

گاهی بجای ارتفاع متمم آن که **فاصله سمتی** یا **فاصلة الراس** نام دارد داده میشود. مختصات افقی بستگی بزمان و مکان ترصد دارند. حد اعلای ارتفاع را **اوج** مینامند.

۲۱ - **ارتفاع قطب** - ارتفاع قطب از افق هر محل از روی دستور $h = ۹۰ - (z + z')$ بدست می‌آید ($z$ و $z'$ فواصل سمتی کوکب ابدی‌الظهوری در مواقع عبور علیا و سفلی از نصف‌النهار محل و $h$ ارتفاع قطب است).

۲۲ — **دستگاه مختصات استوائی (مختصات معدلی) : بعد و میل** — **سطح اعلی استوای فلکی** و نقطه اصلی **نقطه اعتدال بهاری** وجهت مستقیم (مخالف حرکت عقربه‌های ساعت). مختص اول را **بعد** ودوم را **میل** میگویند متمم میل **فاصله قطبی** نام دارد. مختصات معدلی بستگی با مکان ترصد ندارند.

۲۳ — **اندازه بعد** - فاصلهٔ زمانی بین عبور کوکب از نصف‌النهار محل و نصف‌النهار مار بر نقطه اصلی را بوسیله ساعت نجومی بدست آورده و بقرار هر ۱۵ درجه در یکساعت بعد کوکب را حساب مینمایند.

۲۴ — **اندازه میل** — اندازه جبری میل هر کوکب از روی دستور کلی : $D = h \pm z$ (با درنظر گرفتن جهت بدست میآید ($D$ میل و $h$ ارتفاع قطب و $z$ فاصلة‌الراس کوکب درموقع عبورش بنصف‌النهار میباشد)

۲۵- **تعیین فاصله قطبی** کواکب درمکانی بعرض $\lambda$ (شماره ۳۲۰):

**در نیمکرهٔ شمالی**

۱- برای کواکب ابدی‌الظهور (حول قطبی) $p < \lambda$

۲ـ کواکب رؤیت شونده (دارای طلوع و غروب): $\lambda < p < 180 - \lambda$

۳ـ « « ابدی الخفاء $180 - \lambda < p$

**در نیمکره جنوبی**

۱ـ برای کوکب ابدی الظهور (حول قطبی): $p < -\lambda$

۲ـ » » رؤیت شونده (دارای طلوع و غروب): $-\lambda < p < 180 + \lambda$

۳ـ » ابدی الخفاء: $180 + \lambda < P$

(P فاصله قطبی کوکب در نیمکره شمالی از قطب شمال و در نیمکره جنوبی از قطب جنوب است و λ در نیمکره جنوبی منفی است)

۲۶ـ **دستگاه مختصات منطقی: طول و عرض** — صفحه اصلی: دایرة البروج و نقطه اصلی نقطه اعتدال ربیعی. جهت **مستقیم**. مختص اول: **طول**، مختص دوم: **عرض**.

## III — زمین

۲۷ — **شکل زمین** - زمین بشکل کره ایست که در قطبینش کمی فرو رفته باشد، نظیر حجمی که از دوران یك نیمه بیضی حول محور اقصرش تولید شود. سطح آن نا صاف و اطرافش راهوائی بقطر تقریبا صد کیلومتر احاطه نموده است.

۲۸ — **دوران زمین** - زمین با حرکت متشابه حول محور موهومی که از مرکز ثقلش میگذرد دوران میکند این محور بر محور عالم منطبق است.

۲۹ — خط و سطح قائم، سطح نصف النهار و افق (بشماره های ۲ و ٤ و ۷ و ۸ مراجعه شود).

۳۰ — **خط نصف النهار** - فصل مشترك سطح نصف‌النهار هر محل با سطح افق همان مكان را خط نصف‌النهار آن محل گويند. اين خط تصوير محور عالم بر سطح افق محل است.

۳۱ — **طول يك نقطه از سطح زمين** - زاويه بين نصف النهار محل و نصف‌النهار نقطه‌ای كه مبداء فرض شده ميباشد (نصف‌النهار گرينويچ يا پاريس را اغلب مبداء طولها ميگيرند) . اندازه آن از صفر تا ۱۸۰ درجه شرقی يا غربی تغيير ميكند (بر حسب فاصله زمانی بازاء هر ساعت ۱۵ درجه محاسبه ميشود).

۳۲ — **عرض يك نقطه از سطح زمين** - زاويه بين قائم مكان (امتداد شعاع زمين در آن نقطه) با سطح استوا است و همچنين مساويست با ارتفاع قطب از افق آن محل (شماره ۲۱)

۳۳ — **مدارات** - مدارات زمين مكان هندسی نقاطی از زمين ميباشند كه دارای يك عرض باشند.

۳۴ — **استوای زمين** - مداری است بعرض صفر.

۳۵ — **قطبين زمين** - دو نقطه از زمين بعرض ۹۰° ميباشند.

۳۶ — **شعاع $r$ افق حسی** - اگر $R$ شعاع زمين و $h$ ارتفاع شخص ناظر از سطح زمين باشد مقدار $r$ شعاع افق حسی از روی دستور $r = \sqrt{2hR}$ بدست ميآيد.

۳۷ — **انخفاض افق** - زاويه‌ای را كه رأسش نقطه‌ای از فضا

(چشم ناظر که مقداری بالاتر از سطح زمین قرار گرفته باشد) و دو ضلعش یکی مماس بر کره زمین و دیگری خط افقی باشد زاویه انخفاض افق گویند.

**۳۸ — طول شعاع زمین از روی زاویه انخفاض افق.** اگر R شعاع زمین و h ارتفاع ناظر و α زاویه انخفاض افق باشد:

$$R = \frac{h \cos\alpha}{۲ \sin^{۲} \frac{\alpha}{۲}}$$

(بازاء: متر ۳۰۰ = h و ′۳۳ = α کیلومتر ۷۰۰۰ = R میشود)

**۳۹ — ابعاد زمین** — ربع محیط نصف النهار زمین مساوی است با: ۱۰۰۰۱۸۶۸ متر.

محیط استوائی زمین مساوی است با: ۴۰۰۷۵۷۲۱ متر.

سطح کره زمین: $۱۰^{۳} \times ۵۱۰۰۶۵$ کیلومتر مربع

حجم کره زمین: $۱۰^{۶} \times ۱۰۸۳۲۰۵$ کیلومتر مکعب.

شعاع کره‌ای که نصف النهارش مساوی نصف النهار زمین باشد = ۶۳۶۷۳۸۷ متر است.

شعاع کره‌ای که سطحش مساوی سطح زمین باشد = ۶۳۷۱۰۰۳ متر است.

شعاع کره‌ای که حجمش مساوی حجم زمین باشد = ۶۳۷۰۹۹۶ متر است.

شعاع استوائی زمین مساویست با: a = ۶۳۷۸۲۴۹ متر

» قطبی » » : b = ۶۳۵۶۵۱۵ متر

فرورفتگی قطبی $\alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{۱}{۲۳,۹۵}$ است

۴۰ — **اندازهٔ شتاب ثقل زمین**ـ در نقطه‌ای از زمین بعرض °۴۵ و هم سطح با دریا مساویست با ۹۸۰٫۶۶۵ (در دستگاه C.G.S)

۴۱ — **وزن مخصوص زمین**ـ در داخل زمین وزن مخصوص ۵٫۵ و نسبت باحجار واقع در سطح زمین ۲٫۵ است.

۴۲ — **سرعت حرکت انتقالی** زمین درهر ثانیه ۲۹ کیلومتر است.

۴۳ — **مدت حرکت انتقالی زمین** بدور شمس ۳۶۵ روز و ۵ دقیقه و ۴۸٫۴۹ ثانیه است.

۴۴ — **مختصات جغرافیائی تهران**ـ طول تهران از نصف النهار پاریس ً۷ وَ۵ و °۴۹ وعرض تهران ً۷ و َ۱ و °۳۵ میباشد.

## IV — نقشه های جغرافی

۴۵ — **تعریف**ـ نقشه های جغرافی عبارتند از صفحاتی که تمام یا قطعه‌ای از سطح زمین را با قاعده مخصوص و مقیاس معین بر روی آن تصویر نموده یا گسترده باشند.

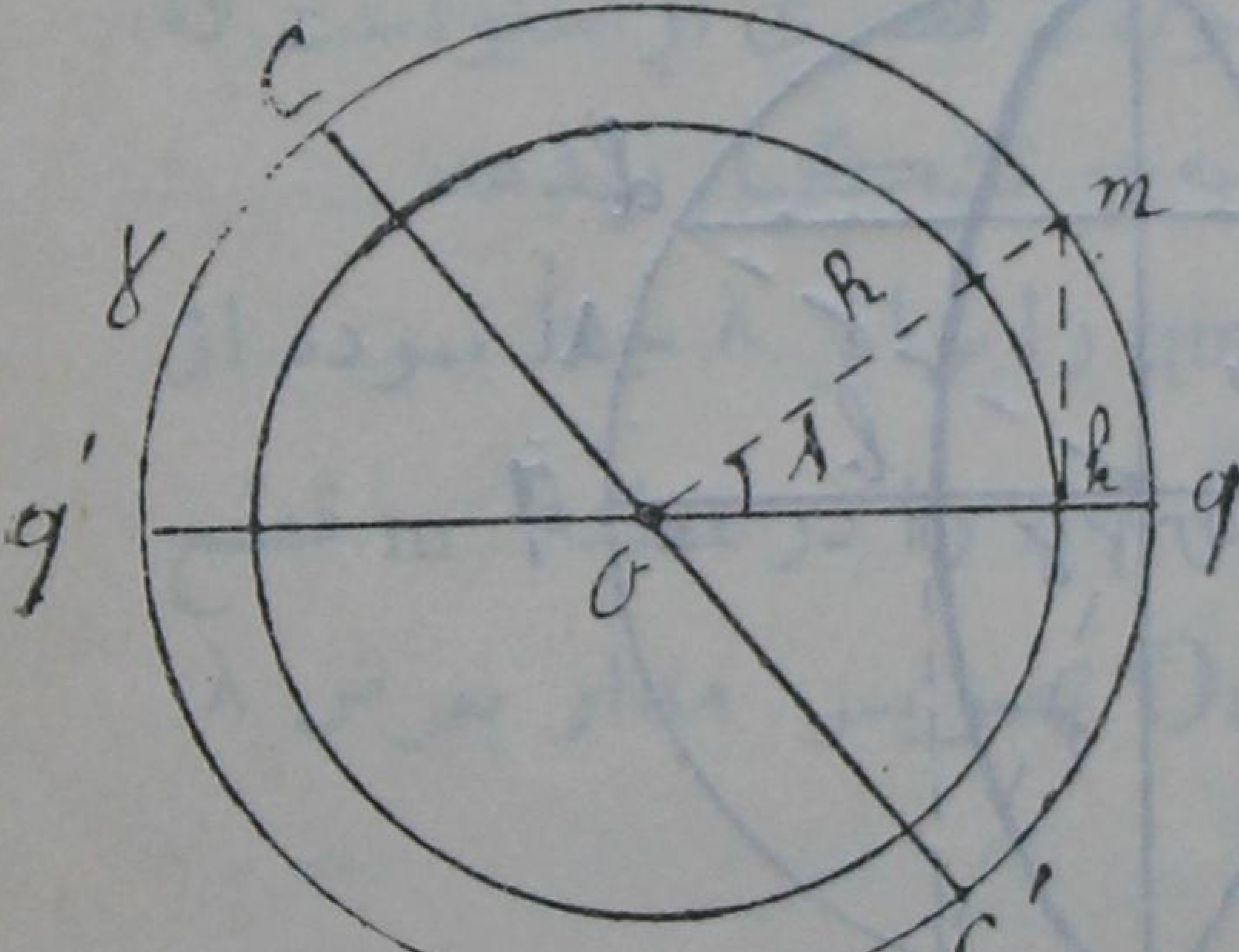
برای ترسیم نقشه قبلا شبکه‌ای از نصف النهارات و مدارات زمین را تهیه نموده و بعد محل هر نقطه را از روی طول و عرضش بر روی آن معین مینمایند.

۴۶ — **تصویر قائم** هر نقطه بریك صفحه موقع عمودی است که از آن نقطه بر صفحه وارد شود. این صفحه را صفحه تصویر نامند.

## ۴۷ — رسم نقشه بطریق تصویر قایم :

**۱ — سطح تصویر سطح استوا میباشد** : تصویر قطب بر مرکز استوا قرار دارد ، تصویر هر مدار بعرض $\lambda$ دایره‌ایست متحدالمرکز با استوا و بشعاع $r = R \cos\lambda$ ، تصویر هر نصف‌النهار بطول $\theta$ قطری از استوار است که با تصویر نصف‌النهار مبداء زاویه $\theta$ تشکیل دهد .

**طریقه رسم** ـ ۱) برای رسم مداری بعرض $\lambda$ از نقطه m انتهای شعاع Om که با oq زاویه $\lambda$ دارد عمود mh را بر $qq'$ وارد مینمائیم، دائره‌ای بمرکز O و شعاع Oh تصویر مدار مفروض است (ش۲) .




(ش ۲)

۲) قوس $Cq'$ را مساوی $\gamma$ جدا مینمائیم قطر $CC'$ تصویر نصف النهار بطول $\gamma$ میباشد (ش۲) .

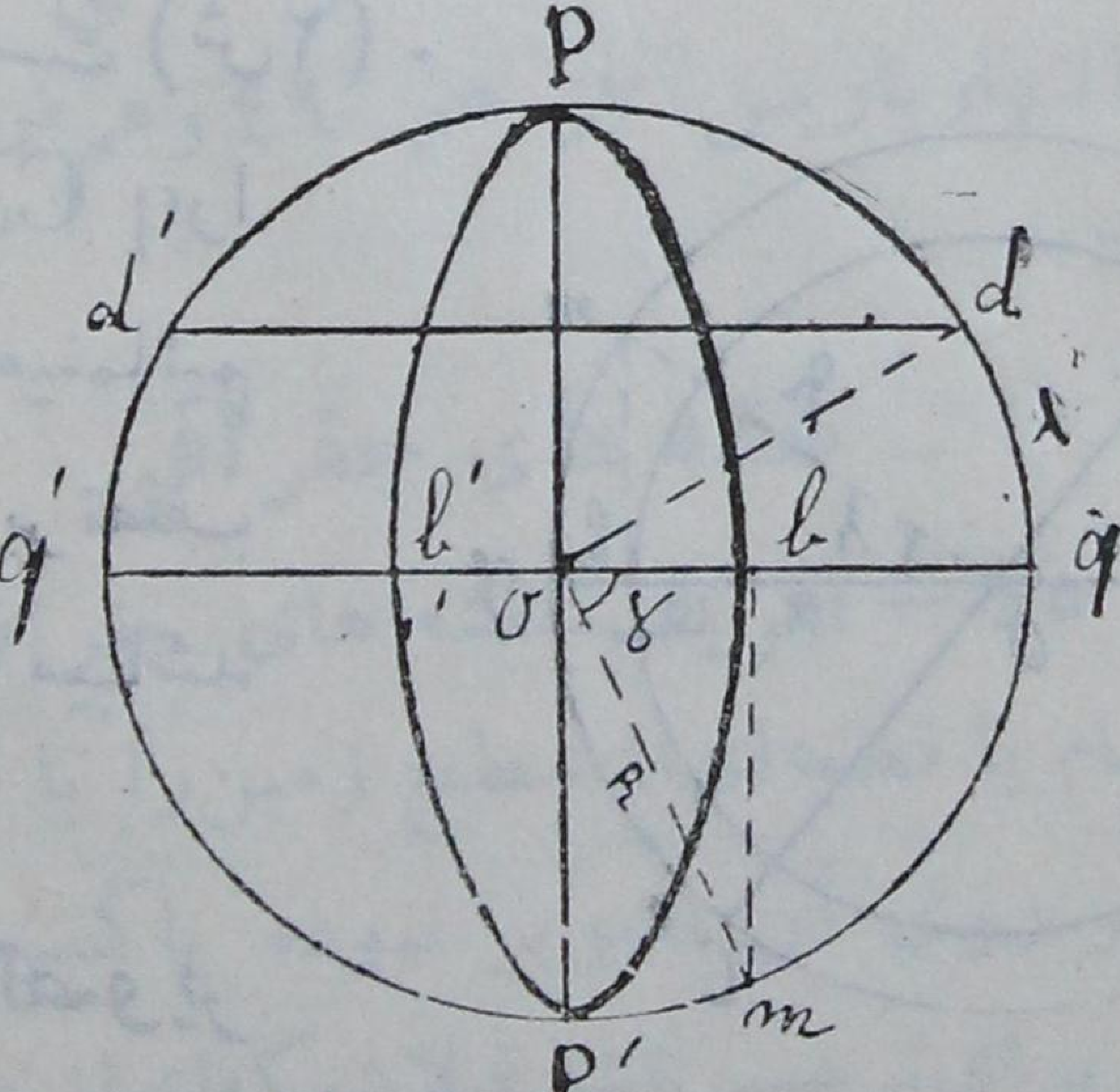
**۲) سطح تصویر یکی از سطوح نصف‌النهار است:** تصویر مدارات و استوا خطوط فصل مشترك آنها با سطح تصویر است .

تصویر مداری بعرض $\lambda$ وتری است موازی استوا که فاصله‌اش از آن روی محیط دایره نصف‌النهار تصویر $\lambda$ درجه است ؛ تصویر هر نصف‌النهار بطول $\gamma$ یك بیضی است که محور

اطولش خط قطبین و محور اقصرش بطول $bb' = ۲R\cos\gamma$ میباشد.

**طریقه رسم ۱)** برای رسم مداری بعرض λ قوس qd را مساوی λ جدا مینمائیم و تر dd' که موازی qq' است تصویر مدار مفروض میباشد.

۲) از نقطه m انتهای شعاع Om که با Oq زاویه γ میسازد عمود mb را بر qq' وارد میکنیم و بر سه نقطه P و b و P' یك نیمه بیضی و بر P و P' و b'، قرینه b نسبت به O، نیمه بیضی دیگری میگذرانیم بیضی PbP'b' تصویر نصف النهار بطول γ میباشد (ش۳).




**خواص و مورد استعمال** – در تصویر قائم نواحی حول مرکز نقشه نزدیك بحقیقت تصویر میشوند و هرچه از مرکز نقشه دورتر شویم دقت نقشه کمتر میشود. طریقه تصویر قائم را بیشتر برای تهیه نقشه نواحی قطب زمین و صور قطبی آسمان و همچنین تصویر ماه و آفتاب و کرات دور بکار میبرند.

## ۴۸ — تصویر مرکزی (استرئوگرافیک)

۱- تعریف - بشماره ۳۰۵ و ۳۰۶ قسمت هندسه مراجعه شود.

۲ - در تصویر مرکزی زوایا بمقدار حقیقی تصویر میشوند.

۳ - تصویر مرکزی هر دایره دایره است.

### رسم نقشه بطریق تصویر مرکزی

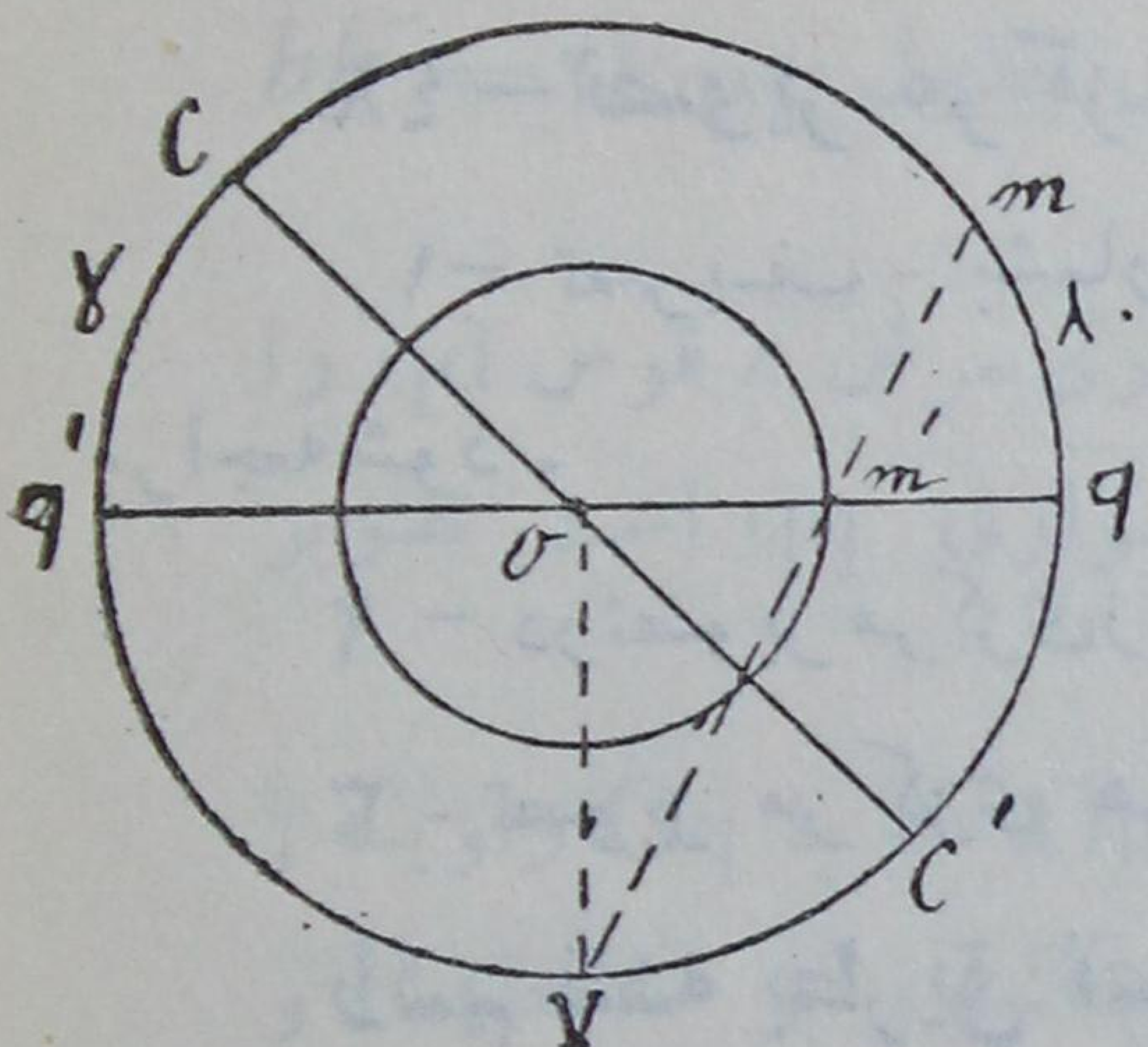
**۱ — پرده سطح استوا است** و مرکز تصویر یا نقطه دید یکی از قطبین میباشد، تصویر مداری بعرض λ دائره‌ایست بمرکز استوا و شعاع $r = R tg\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)$

تصویر هر نصف‌النهار بطول γ قطری از استواست که با تصویر نصف‌النهار مبداء زاویه γ تشکیل میدهد.

**طریقه رسم — ۱)** قوس qm را برابر λ جدا نموده از نقطه دید V به m وصل میکنیم تا -qq را در نقطه ´m قطع کند دایره بمرکز O و شعاع ´Om تصویر مدار بعرض λ میباشد.

۲) قوس ´qC را مساوی γ جدا مینمائیم قطر ´CC تصویر نصف‌النهار بطول γ میباشد (ش٤).

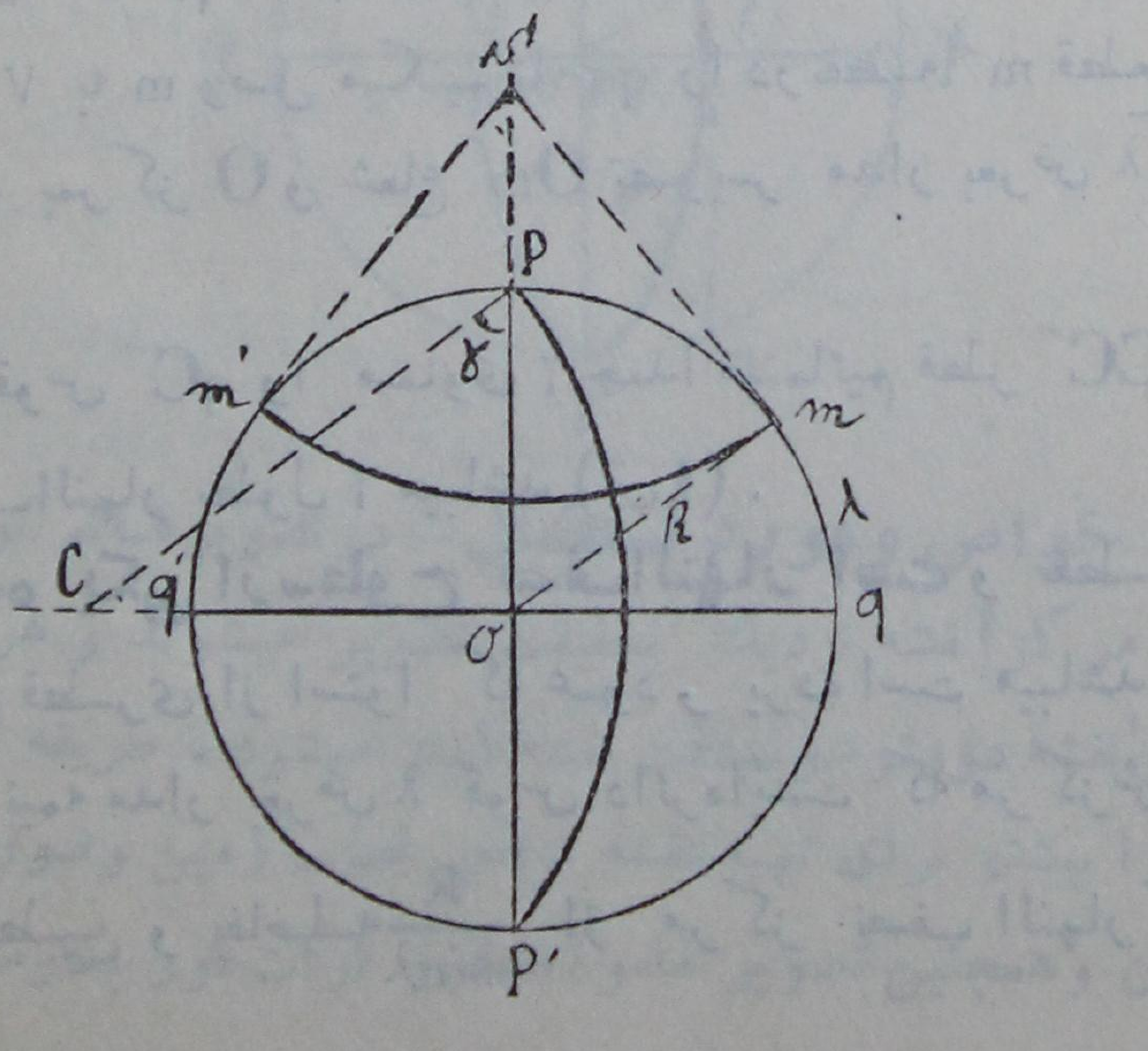
**۲-پرده یکی از سطوح نصف‌النهار است** و نقطه دید انتهای قطری از استوا که عمود بر پرده است میباشد. تصویر هر نیمه مدار بعرض λ قوس دائره‌ایست که مرکزش بر خط قطبین و بفاصله $\frac{R}{sin\lambda}$ از مرکز نصف‌النهار




(ش٤)

تصویر قرار دارد؛ تصویر هر
نصف النهار بطول $\gamma$ قوس
دائره‌ایست مار بر دو قطب که
مرکزش بر قطر عمود بر خط
قطبین و بفاصله $Rtg\gamma$ از مرکز
سطح نصف النهار تصویر قرار
دارد.

**طریقه رسم** ۱) قوس
mq را مساوی $\gamma$ جدا نموده
مماس Sm قطر $PP'$ را در S قطع مینماید بمرکز S وشعاع
Sm دائره‌ای رسم مینمائیم قوس $mm'$ از این دائره تصویر نیمه
مدار بعرض $\gamma$ میباشد. ۲) از P خط PC را چنان رسم میکنیم
که با PP زاویه $\gamma$ بسازد، بمرکز C نقطه تلاقی این خط با $q'$
وشعاع CP دائره‌ای رسم میکنیم قوس $PP'$ از این دایره
تصویر نیمه نصف النهار بطول $\gamma$ میباشد (ش٥).




(ش٥)

**خواص و مورد استعمال** — در تصویر مرکزی چون زوایا تغییر نمیکنند تصویر مشابه شکل اصلی هستند وضمنا هر چه از مرکز بمحیط نقشه نزدیکتر شویم تصویر بحقیقت نزدیکتر میشود. طریقه تصویر مرکزی را برای تهیه نقشه‌های مسطحه نیمکره زمین و نقشه های ممالك بکار میبرند.

**۴۹ — تهیه نقشه بطریق گسترش استوائی** - استوانه مستدیر قائمی بریك کرهٔ مصنوعی زمین که بمقیاس معین تهیه شده محیط مینمائیم بطوریکه دو قاعده اش بر قطبین کره مماس شوند بعد فصل مشترکهای سطوح نصف النهارات و مدارات را با سطح جانبی استوانه بدست میآوریم واستوانه را روی یك صفحه میگسترانیم ؛ شبکه‌ای بدست میآید که در آن نصف النهارات و مدارات بترتیب بخطوط قائم و افقی نموده شده اند. دراین گسترش ناحیه استوائی نزدیك بحقیقت نموده شده و هرچه بقطب نزدیکتر شویم فواصل مدارات ودقت نقشه کمتر میشود.

**۵۰ - تهیه نقشه بوسیله گسترش مخروطی** - مخروط قائمی محاذی مدار متوسط ناحیه کوچکی که میخواهند نقشه آنجا را تهیه کنند بر کره محیط مینمایند بطوریکه فصل مشترك هر نصف النهار با سطح جانبی مخروط بر یکی از مولد های آن منطبق گردد. فصل مشترك سطح مدارات را نیز باسطح جانبی مخروط بدست آورده و مخروطرا بر صفحه‌ای میگسترانند؛ شبکه نقشه‌ای بدست میآید که در آن نصف النهارات

بخطوط متقاطع در یك نقطه (راس مخروط) و مدارات به دوایر متحدالمرکزی بمرکزراس مخروط نموده‌شده‌اند.

این نقشه برای ناحیه کوچکی از کره که درطرفین مدار متوسط آن واقع شده است قابل استفاده میباشد.

## V - خورشید

**۵۱ - مدارخورشید** - خورشیددرجهت مستقیم بدور زمین (بفرض ثابت بودن) مداری بیضی شکل میپیماید که‌زمین دریکی ازکانونهای آن قرار گرفته وخروج از مرکز این بیضی تقریباً $e = \frac{۱}{۶۰}$ میباشد.

**۵۲ - میل دایرةالبروج** - زاویه بین دایرةالبروج و استوای فلکی مساوی ′۲۷ و °۳۷ میباشد.

**۵۳ - قطر ظاهری خورشید** - قطرظاهری متوسط خورشید۲۵ر″۵۹و′۳۱ یاباتقریباً ′۳۲ میباشد بزرگترین مقدار قطر ظاهری دردیماه (اول‌ژانویه″۳۵ و ′۳۲ و کوچکترین مقدار آن درتیرماه (اول ژوئیه) ″۳۲،′۳۱ است.

**۵٤ - اختلاف منظر افقی شمس** ۸۰ر′ ۸ میباشد

**۵۵ - شعاع خورشید** - صد برابر شعاع زمین و مساوی ۶۹۵۵۰۰ کیلومتر است

**۵۶ - وزن مخصوص** آن نسبت باب ٤ر۱ و نسبت بزمین ۲۵۶ر۰ است.

**۵۷ - جرم خورشید** ۳۳۳٤۳۲ برابرجرم زمین است.

**۵۸ - حجم خورشید** - ۱۳۰۱۲۰۰ برابرحجم زمین است.

۵۹ - سنگینی هر جسم در روی استوای خورشید تقریباً ۲۸ برابر سنگینی آن جسم در روی استوای زمین است .

۶۰ - خورشید در مدت ۳۳ روز و ٤ ساعت و ۲۹ دقیقه یکمرتبه بدور خود میگردد .

۶۱ - فاصله متوسط زمین از خورشید ۲۳٤٤۰ برابر شعاع زمین یا ۱٤۹۵۰۱۰۰۰ کیلو متر یا بعدد کامل ۱۵۰۰۰۰۰۰۰ کیلومتر است .

۶۲ - **تقدیم دو نقطهٔ اعتدال** - نقطه اعتدال بهاری هر سال تقریباً ۲۶″۵۰ در جهت مخالف ( بر خلاف توالی بروج ) عقب میرود . یعنی در ۲۶۰۰۰ سال یکدور معدل النهار را طی میکند .

۶۳ - **تعیین دو نقطه اعتدال** - اگر a و d بعد و میل خورشید در ظهر روز قبل از نوروز ( نوروز روزیستکه خورشید بنقطه اعتدال بهاری γ میگذرد ) و a' و d' بعد و میل آن در ظهر روز بعد از نوروز باشند و x بعد نقطه γ باشد :

$$x = \frac{ad' + da'}{d + d'}$$

بعد نقطه اعتدال پائیزی ( خریفی ) γ' نیز بکمک همین دستور حساب میشود .

پس از محاسبه معلوم میشود که اختلاف این دو بعد ۱۸۰ درجه است ( مبداء بعد اختیاری است )

۶٤ - **تعیین ساعت عبور شمس بنقطه اعتدال بهاری** - اگر t زمان بین ظهر روز قبل از نوروز و ظهر روز بعد از

نوروز و d و 'd میل شمس در این دو موقع و T زمان بین ظهر روز قبل از نوروز تا موقع عبور شمس نقطه $\gamma$ باشد.

$$T = \frac{dt}{d + d'}$$

**۶۵ - ساختمان آفتاب** - اگر از مرکز بسمت محیط رویم از طبقات زیر بترتیب عبور خواهیم کرد:

۱ — هسته مرکزی سیال با درجه حرارت بی اندازه زیاد؛

۲ — یک سطح درخشان موسوم به فوتوسفر یا کرهٔ نور که از گازهای محترقه تشکیل شده و نوری که بنظر ما میرسد از این طبقه است و کلف های خورشید نیز لکه های سیاهی هستند که در این طبقه جا دارند؛

۳- یک اتمسفر بخار موسوم به طبقه تابان که طیف شمسی از آن حاصل میشود؛

۴- یک اتمسفر قرمز رنگ موسوم به کروموسفر یا کرهٔ رنگین که مخصوصاً از هیدروژن تشکیل یافته؛

۵- یک طبقه شفاف و سفید رنگ که در موقع کسوف به شکل طوق سفید دیده میشود.

## VI - زمان و تقویم

۶۶- زمان نجومی H بین طلوع و غروب کوکبی که فاصله قطبیش P باشد در مکانی بعرض $\lambda$ عبارتست از:

$$\cos H = - \frac{tg\lambda}{tg P}$$

۶۷ — **روز نجومی** عبارتست از فاصله دو عبور متوالی مرکز ستاره‌ای از نصف‌النهار معین و طول آن ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه است .

۶۸ — **روز خورشیدی یا شمسی** عبارتست از فاصله دو عبور متوالی خورشید از نصف‌النهار معین .

طول روز شمسی ثابت نیست زیرا سرعت حرکت آفتاب بر روی دایرة‌البروج ثابت نمیباشد .

۶۹ — **خورشید مجازی** خورشیدی است که دایرة‌البروج را در مصاحبت خورشید حقیقی با سرعت ثابتی بپیماید .

۷۰ — **روز شمسی متوسط** فاصله دو عبور متوالی خورشید مجازی است بر نصف‌النهار معین .

۷۱ — **ساعت نجومی** $\frac{1}{24}$ روز نجومی و ساعت شمسی $\frac{1}{24}$ روز شمسی حقیقی و ساعت رسمی $\frac{1}{24}$ روز شمسی متوسط است .

۷۲ — **سال مداری یا اعتدالی** ـ مدت بین دو عبور متوالی خورشید بر نقطه اعتدال بهاریست و عبارتست از:

۳۶۵ر۲۴۲۱۹۸۷۹ روز = ۳۶۵ روز ۵ ساعت ۴۸ دقیقه ۴۷ر۵۵ ثانیه

۷۳ — **سال نجومی** مدت زمانی است که به بعد خورشید از مبداء نقطه اعتدال بهاری ۳۶۰ درجه افزوده شود، یا زمان بین دو عبور متوالی شمس بنصف‌النهار کوکبی است ثابت و عبارتست از:

۵ر۹ ثانیه ۹دقیقه ۶ ساعت ۳۶۵ روز

۷۴ — **فصول** ـ فواصل زمان بین عبور خورشید از نقاط اعتدال وانقلاب راچهار فصل مینامند.

**بهار** بین نقطه اعتدال بهاری تا انقلاب تابستانی:

۲۱ ساعت ۹۲ روز

**تابستان** » » انقلاب تابستانی تا اعتدال پائیزی:

۱۴ ساعت ۹۳ روز

**پائیز** » » اعتدال پائیزی تا انقلاب زمستانی:

۱۹ ساعت ۸۹ روز

**زمستان** » » انقلاب زمستانی تا اعتدال بهاری:

۱ ساعت ۸۹ روز

۷۵ — **معادله زمان** ـ معادله زمان عبارتست از $t_m - t_v$ یعنی تفاضل بین زمان متوسط و زمان حقیقی در یك مکان معین و برای خواندن ساعت آفتابی دانستن آن حتماً لازَم است وتغییرات آنرا جدول زیر نشان میدهد:

| تاریخ | اول ژانویه | ۱۱ فوریه | ۱۶ آوریل | ۱۴ مه | ۱۴ ژوئن |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_m - t_v$ | دقیقه<br>↖ ۴ | دقیقه ثانیه<br>۲۶ ۱۴ | ↖ ۰ ↙ | دقیقه ثانیه<br>۵۲ ۳ | ↖ ۰ ↙ |
| تاریخ | ۲۶ ژوئیه | ۱ سپتامبر | ۳ نوامبر | ۲۴ دسامبر | اول ژانویه |
| $t_m - t_v$ | دقیقه ثانیه<br>۱۸ ۶ ↙ | ۰ ↙ | دقیقه ثانیه<br>۲۰ ۱۶— | ↖ ۰ | دقیقه<br>↖ ۴ |

**تقویم**

۷۶ — سال مداری عبارتست ازفاصله دو عبور متوالی خورشید از نقطه اعتدال ربیعی .

۷۷ — سال رسمی سالی است مرکب از عدد صحیحی ازایام که‌درحد اعلای امکان با سال اعتدالی تطبیق نماید.

۷۸ — تقویم قاعده‌ایست که برای تطبیق سالهای رسمی با سالهای مداری وضع میگردد .

تقویم درنزد ملل مختلف مبانی مختلف داشته و دارد که مهمترین آنها عبارتنداز تقویم مصری ، قیصری ، گرگواری وتقویم جلالی (فارسی) .

۷۹ — **تقویم مصری** - مصریان سال رسمی را ۳۶۵ روز میگرفتند ، پس در هر سال در حدود شش ساعت عقب میافتادند بطوریکه درهر سیصد وشصت و پنجسال ۳ ماه در تعیین فصول اختلاف حاصل میشد وهرفصل جای خودرا بفصل دیگر میداد ، پس برای اینکه اول بهار رسمی بعد ازیك دوره مجدداً باول بهار واقعی منطبق گردد باید ۱۴۶۰ سال بگذرد این دوره ۱۴۶۰ ساله را دوره سوتیاك میگفتند .

**تقویم قیصری** - رومیان نخست سال را ۳۶۴ روزو بعد مانند مصریان ۳۶۵روز میگرفتند ولی برای جلوگیری‌از بی‌نظمی تاریخ مصری هرچندین سال یکبارچند روز بسال‌رسمی خود میافزودند تاباسال مداری تطبیق کنند .

در۴۴ سال پیش ازمیلاد ژول‌سزار قیصرروم بدستیاری

سوزیژن منجم تصمیم باصلاح تقویم گرفت وهر سه‌سال را ۳٦٥ روز وسال چهارم (کبیسه) را ۳٦٦ روزمقرر داشت.

**تقویم گرگواری** – اصلاح قیصری برای تطبیق سال رسمی باسال مداری کافی نبود و سال رسمی باندازه $\frac{۳}{٤٠٠}$ روز ازسال مداری درازتر بود. پاپ گرگوار هشتم بکمك منجم معروف لیلیو بسال ۱۵۸۲ مقررداشت که ده‌روزاختلافی راکه ازموقع اصلاح قیصری بوجود آمده بود اصلاح کنند و روز۱٤ اکتبر۱۵۸۲ را۱۵ اکتبر بدانند واز آن پس درهرچهارصد سال سه سال کبیسه را غیر کبیسه محسوب نمایند.

اکنون در تاریخ مسیحی سالهائی که دو رقم آخرشان به ٤ قابل قسمت است کبیسه‌اند مگر آنها که بدو صفر ختم میشوند و سده های آنها بر چهار قابل قسمت نیستند (مانند ۱۹۰۰)

۸۲ – **تقویم جلالی** – تعدیل گرگواریهم اختلاف بین سالهای رسمی ومداری راکاملا ازبین نمیبرد یعنی در هر دوهزارسال یکروز اختلاف پیدا میشود.

بهترین تعدیلی که تاکنون در تقویم شده است بوسیله عمرخیام وجمعی دیگر مانندعبدالرحمن خازنی درسال ٤٧١هجری انجام شده است واختلاف بین سالهای رسمی و مداری درهر ششهزارسال یکروز است.

دراین تقویم درهردوره سی‌وسه ساله هشت سال کبیسه و۲۵سال غیر کبیسه است باین ترتیب که ازآغاز دوره‌هرسه

سال غیر کبیسه و سال چهارم کبیسه است ودر آخر دوره چهار سال غیر کبیسه میباشد.

آغاز دوره سی و سه ساله‌ای که فعلا در آن هستیم سال ۱۳۱۰ بوده‌است. دراین دوره سالهای ۱۳۱۳-۱۷-۲۱-۲۵-۲۹-۳۳-۳۷-۴۲ کبیسه میباشند.

۸۳ - **تقویم قمری** - سال عادی قمری ۳۵۴ روز ودر سال های کبیسه ۳۵۵ روز است ومشتمل بر ۱۲ ماه ۲۹ روزی یا ۳۰ روزی است.

ماه قمری با دیدن هلال ماه مشخص میگردد ولی برای آنکه وضع ثابتی داشته باشند معمولا یکماه بیست و نه روزی وماه دیگر ۳۰ روزی حساب میشود.

درهردوره سی ساله یازده سال کبیسه است که عبارتند از سالهای ۲ و ۵ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ و ۱۸ و ۲۱ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۹.

## VII - ماه

۸۴ - **مدار ماه** - قمر بدور زمین مدار بیضی شکلی در جهت مستقیم می پیماید که زمین دریکی از کانونهایش قرار گرفته ومیل متوسطش نسبت بدایرة البروج $5°8'43''$ است و این میل درمدت ۱۷۳ روز بین $5°$ و $(18'$ و $5°)$ تغییر میکند.

خروج از مرکز این بیضی تقریباً $e = \frac{1}{18} = ۰٫۰۵۴۹$ میباشد.

۸۵ - **دوره نجومی** ( ماه نجومی ) - زمانیست

محصور بین دو مقارنه متوالی قمر با یك ستاره ثابت و مدتش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۵ر۱۱ ثانیه است .

۸۶ — **دوره اعتدالی** ( ماه اعتدالی ) - زمانیست بین دو مقارنه قمر با نقطه اعتدال ربیعی ویا زمان بین دو مرور متوالی قمر بیك نصف النهار سماوی و مدتش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۷ر۴ ثانیه است .

۸۷ — **دوره هلالی** (ماه قمری) - زمانیست محصور بین دو مقارنه قمر یا شمس ویا بازگشت قمر یا شمس بر هریك از نصف النهارات و مدت متوسط آن ۲۹ روز و ۱۲ ساعت و ۴۴ دقیقه و ۹ر۲ ثانیه است .

۸۸ — **فاصله متوسط ماه از زمین** - مساوی ۲۵ر۶۰ برابر شعاع استوائی زمین یا ۳۸۴۴۰۰ کیلومتر است این مقدار مربوط است باختلاف منظر ماه وقتی که ″۲،′۵۷ باشد.

۸۹ — **قطر ظاهری متوسط ماه** - ″۴۷ر۳ و ′۳۱ و بزرگترین مقدار آن تقریبا ″۵۰ و ′۳۳ و کوچکترین مقدارش تقریبا ″۲۲ و ′۲۸ میباشد.

۹۰ — **اختلاف منظر افقی ماه** ″۷ر۲ و ′۵۷ است .

۹۱ — **شعاع ماه** ۰/۲۷۳ یا $\frac{۳}{۱۱}$ شعاع استوائی زمین یا ۱۷۳۷ کیلومتر است.

۹۲ — وزن مخصوص آن نسبت به آب ۳/۳۳ و نسبت به زمین ۰/۶۰۶ است.

۹۳ - **جرم ماه** - ۰۱۲۳ر۰ یا $\frac{۱}{۸۱}$ جرم زمین است .

۹۴ - **حجم ماه** - $\frac{۱}{۵۰}$ حجم زمین میباشد .

۹۵ - **سطح ماه** - قریب $\frac{۱}{۱۳}$ سطح زمین میباشد

۹۶- وزن اجسام در استوای ماه ۱۶۶ر۰ برابر وزن اجسام دراستوای زمین است .

۹۷ - **حرکت وضعی ماه** - قمر در مدتی مساوی دوره نجومی یا یکماه نجومی یعنی ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۵ر۱۱ ثانیه بدورخود میگردد .

۹۸- قسمتی ازماه که قابل رویت میباشد $\frac{۵۹}{۱۰۰}$ سطح کل آن میباشد .

۹۹ - **عقدتین** - نقاط تلاقی مدارماه بادایرة البروج بنام عقدتین موسوم است یکی عقده رأس و دیگری عقده ذنب. قمر پس ازعبور ازعقده راس شمالی و پس ازعبور ازعقده ذنب جنوبی میگردد عقده راس روزی ۶۳ر ۱۰″ و ۳′ روی دایرة البروج عقب میرود یعنی درمدت ۵ر۶۷۹۳ روز یا تقریبا ۱۸ سال و $\frac{۲}{۳}$ سال یکدور دایرة البروج را طی مینماید .

## VIII- خسوف و کسوف

۱۰۰- **خسوف** - ( گرفتن ماه ) -۱- فاصله △ رأس

مخروط ظل زمین حاصل از تابش آفتاب بر آن از مرکز زمین بفرض اینکه r شعاع زمین و d قطر ظاهری آفتاب و p اختلاف منظر آن باشد عبارتست از :

$$\Delta = \frac{r}{\sin\frac{d}{۲} - \sin P}$$

میتوان در این فورمول بجای جیب زاویه‌های کوچک $\frac{d}{۲} = ۱۶' ۲\text{ر}''$ و $P = ۸\text{ر}۸۰''$ مقدار این زوایا را بر حسب رادیان گذاشت در اینصورت چنین بدست میآید :

$$\Delta = \frac{r \times ۲۰۶۲۶۵}{۹۶۲ - ۸\text{ر}۸۰} = ۲۱۶\,r$$

۲- بفرض اینکه λ عرض ماه در لحظه مفروض و d قطر ظاهری آفتـاب و d' قطر ظاهری ماه و P اختلاف منظر خورشید و P' اختلاف منظر ماه باشد :

برای اینکه خسوف کلی دست دهد بایستی در موقع مقارنه

$$\lambda < P + P' - \frac{d + d'}{۲}$$

برای اینکه خسوف جزئی دست دهد :

$$P + P' - \frac{d + d'}{۲} < \lambda < P + P' - \frac{d - d'}{۲}$$

عبارت $P + P' - \frac{d + d'}{۲}$ بین (۲۰ر۵۹'') و (۳۱'ر۳۰'')

و عبارت $P + P' - \frac{d - d'}{۲}$ بین (۵۲'ر۲۹'') و (۹۲'ر۴۰'')

تغییر میکند .

**۱۰۱- کسوف** - ( گرفتن خورشید ) -۱- فاصله $\triangle'$ راس مخروط ظل ماه حاصل از تابش آفتاب بر آن از مرکز ماه بفرض اینکه r شعاع زمین و d قطر ظاهری خورشید و P اختلاف منظر آن و 'd قطر ظاهری ماه باشند عبارتست از:

$$\triangle' = \frac{r \sin\frac{d'}{۲}}{\sin\frac{d}{۲} - \sin P}$$

میتوان در این فورمول بجای سینوس زاویه کوچک $\frac{d}{۲} = ۱۶'۲''$ مقدار آنرا برحسب رادیان قرار داد لذا با

توجه باینکه نسبت $\frac{\sin\frac{d'}{۲}}{\sin P}$ همان نسبت شعاع ماه بشعاع زمین

یعنی $\frac{۳}{۱۱}$ میباشد مقدار $\triangle'$ بصورت زیر درمیآید :

$$\triangle' = r \times \frac{۳}{۱۱} \times \frac{۲۰۶۲۶۵}{۹۶۲} = ۵۹r$$

۲- بفرض اینکه λ عرض قمر در لحظه مفروض و d قطر ظاهری آفتاب و 'd قطر ظاهری ماه و P اختلاف منظر آفتاب و 'P اختلاف منظر ماه باشد.

برای اینکه کسوف در بعضی از نقاط زمین دیده شود ستی درموقع مقارنه داشته باشیم

$$\lambda < P' - P + \frac{d + d'}{۲}$$

برای اینکه کسوف کلی یا حلقوی در بعضی از نقاط زمین دیده شود بایستی داشته باشیم ،

$$\lambda < p' - P + \frac{d - d'}{۲}$$

عبارت $P' - P + \frac{d + d'}{۲}$ بین (۲٤ و ۱°) و (۳٤ و ۱°)

و عبارت $P' - P + \frac{d - d'}{۲}$ بین ۵۳' و ٦۳' تغییر میکند .

## IX - قوانین هیئت

**۱۰۲- قوانین کپلر** - قانون اول - سیارات حول آفتاب درجهت مستقیم بیضی هائی نزدیك بدایره میپیماید که خورشید دریکی ازدو کانون آن قراردارد .

قانون دوم - مساحاتی که شعاع حامل هر سیاره ( خط و اصل بین خورشید و سیاره ) در زمانهای متساوی میپیماید معادل میباشند .

قانون سوم - مجذورات زمانهائیکه سیارات صرف پیمودن مداراتشان میکنند متناسب اند بامکعبات محور اطول مداراتشان یعنی اگر t و t' زمانهای دوره نجومی و d و d' بترتیب طول محور های اطول مدارات دو سیاره باشند:

$$\frac{t^{۲}}{t'^{۲}} = \frac{d^{۳}}{d'^{۳}}$$

**۱۰۳- قانون نیوتن** - ( قانون جاذبه عمومی ) - هر گاه دوستاره برطبق قوانین کپلر بدور یکدیگر گردش کنند بنسبت

مستقیم جرمشان و بنسبت عکس مجذور فاصله‌شان یکدیگر را جذب میکنند یعنی اگر m و m' اجرام و d فاصله دو کوکب باشند F نیروی جذب آنها نسبت بیکدیگر عبارتست از ،

$$F = \frac{mm'}{d^2} \times K$$

K ضریبی است ثابت و عبارتست از قوه جاذبه‌ایکه واحد جرم بر واحد جرم در واحد فاصله وارد آورد و مقدارش در دستگاه G.C.S عبارتست از $\left(\frac{1}{3862}\right)^2$ دین (قانون فوق کلی است و بین هر دو جسم ثابت و برقرار میباشد .)

## X ـ سیارات

۱۰۴ ـ **سیارات** عمده در دستگاه منظومهٔ شمسی بترتیب از نزدیکترین آنها بخورشید عبارتند از :

**۱ـ عطارد ۲ـ زهره ۳ـ زمین ۴ـ مریخ ۵ـ مشتری ۶ـ زحل ۷ـ اورانوس ۸ـ نپتون**

بین مریخ و مشتری دسته سیارات کوچك قرار گرفته‌اند

۱۰۵ ـ **قانون بد** ـ اعداد ۰ ،۳،۶،۱۲،۲۴،۴۸،۹۶ را که ازدومی ببعد هریك دو برابر عدد ماقبل است نوشته و بعد بهریك ۴ واحد میافزائیم تا حاصل شود ۴،۷،۱۰،۱۶،۲۸،۵۲، ۱۰۰ بعد هریك ازآنها را بر ۱۰ قسمت میکنیم حاصل میشود ۴ر۰و۷ر۰و۱و۶ر۱و۸ر۲و۲ر۵و۱۰ این اعداد بترتیب نسبت فواصل سیارات راازخورشید بفاصله‌زمین از آن با تقریب کمی نشان میدهند .

# در تدوین این کتاب

## از کتابهای ذیل استفاده شده است

| نام کتاب | نام نویسنده |
|---|---|
| ۱- التفهیم | ابو ریحان محمد بیرونی |
| ۲- جبر | دکتر محمود مهران |
| ۳- مکانیک | دکتر محمود مهران - محسن هنربخش |
| ٤- هیئت | آقای رضا نجمی (مهندس الملك) |
| ۵- حساب | مرحوم غلامحسین رهنما |
| ٦- خلاصه حساب | E. Jacquet |
| ۷- جبر | F.G.M. |
| ۸- جبر و مثلثات | H. commissaire |
| ۹- خلاصه جبر | E. Jacquet |
| ۱۰- مثلثات | H. Ferval |
| ۱۱- مثلثات | Carlo Bourlet |
| ۱۲- مکانیک | Réunion des professeurs |
| ۱۳- خلاصه مکانیک | E. Jacquet |
| ١٤- هندسه | F.G.M. |
| ۱۵- هندسه | H. commissaire |
| ١٦- هیئت | » » |
| ۱۷- خلاصه هیئت | E. Jacquet |
| ۱۸- هیئت | Réunion des professeurs |
| ۱۹- فورمولر | E.Weille t H.Sebban |
| ۲۰- فورمولر مکانیک | T. Caronnet |

# غلطنامه

| صفحه | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۵ | ۱۰ | پاید | پایه |
| ۵ | ۱۷ | an | $a^n$ |
| ۵ | ۲۰ | $(ab^m$ | $(ab)^m$ |
| ۱۷ | ۱۷ | دوره | دوری |
| ۱۸ | ۱۲ | بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{d}$ | همچنین بین $\frac{a}{c}$ و $\frac{c}{a}$ [illegible]ه شود |
| ۱۸ | ۱۳ | بین $\frac{a}{a-b}$ و $\frac{c}{c+d}$ | و گذاشته شود |
| ۲۰ | ۴ | $n\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdots l}$ | $\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c\cdots l}$ |
| ۳۴ | ۱ | ۴۹ر۵ر۰۰ر۰۰ | ۴ر۹۵ر۰۰ر۰۰ |
| ۳۴ | ۲ | ۴۹۵ | ۰۹۵ |
| ۳۴ | ۱۱ | باقیما، | باقیمانده |
| ۳۸ | ۴ | $\frac{\sqrt{b}}{b}$ | $\frac{a\sqrt{b}}{b}$ |
| ۴۳ | سطر آخر | | = مقابل خط کسری قرار گیرد |

| صفحه | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ٤٤ | ۲ | $\sqrt[o]{a^{p}}$ | $\sqrt[q]{a^{p}}$ |
| ٤٤ | سوم از آخر | $a=\frac{۱}{m+m'}$ | $=a^{\frac{۱}{m+m'}}$ |
| ٤٤ | سطر آخر | $=a\frac{۱}{m-m'}$ | $=a^{\frac{۱}{m-m'}}$ |
| ٤٥ | ٦ | $a^{-\frac{p}{q}}=\frac{۱}{\sqrt[p]{a^{p}}}$ | $a^{-\frac{p}{q}}=\frac{۱}{\sqrt[q]{a^{p}}}$ |
| ٤٨ | ۱۲ | فیتا | فیثا |
| ٤٨ | ۲۱ | $+b^{m}$ زائد است | |
| ٤٩ | ۲ | $a^{n}$ | $b^{n}$ |
| ٥٦ | ۹ | $S_{۳}-$ | $S^{۲}=$ |
| ٦۲ | ۱٦ | $\frac{۲}{x}$ | $\frac{۱}{x}$ |
| ٦٤ | ۱۳ | $-۷٦\times$ | $-۷x+٦$ |
| ۷۰ | ۳ | $\sqrt[q+۱]{q}$ | $\sqrt[q+۱]{q}$ |
| ۷۱ | ۳ از آخر | ۱۰۰ | ۱۰۱ |
| ۷٤ | ٦ از آخر | منفی مانتیس | منفی ومانتیس |
| ۷۹ | ۸ | $(۱+r)^{m+۱}$ | $(۱+r)^{n+۱}$ |

| صفحه | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۷۹ | سطر آخر | $(۱+r)\,p^{-۱}$ | $(۱+r)^{p-۱}$ |
| ۸۰ | ٦ | از | در |
| ۸۰ | سوم از آخر | حاصل | حامل |
| ۸۳ | در شکل ٦ محل تلاقی سه محور حرف o گذاشته شود | | |
| ۸۳ | ۳ | $r^۳$ | $r^۲$ |
| ۸٤ | ۱۱ | OPMP | OPMP' |
| ۹۲ | ۱۱ | V | V' |
| ۹۳ | ۲ | $muu^{m-۱}$ | $mu'u^{m-۱}$ |
| ۹۳ | ٤ | y | y' |
| ۹۳ | ۱۱ | $y' = \frac{}{}$ | $y' = -\frac{}{}$ |
| ۱۰۳ | ۲ از آخر | $\frac{}{a}$ | $\frac{x}{a}$ |
| ۱۰٤ | ۷ از آخر | مخارج هر دو کسر ab'--a'b میباشد | |
| ۱۰۷ | ۱۲ | MM" | MM' |
| ۱۰۹ | ۷ از آخر | x−a) | (x−a) |
| ۱۰۹ | ۳ از آخر | $\alpha_۲ \beta$ | $\alpha$ و $\beta$ |
| ۱۱۰ | ٤ | [a, f(a)] | [a و f( )] |
| ۲۱۰ | ٥ | $f^۲\,(a)$ | f'(a) |
| ۱۱۲ | ۳ | +8 | $+\infty$ |
| ۱۱۸ | ۲ | *sin* m | *sin* mx |

| صفحه | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۱۱۸ | ٤ | $Y-$ | $Y=$ |
| ۱۱۸ | ٥ | $۱+tgx$ | $۱+tg^{۲}x$ |
| ۱۱۸ | ٦ | $sinx$ | $sin^{۲}x$ |
| ۱۱۸ | ٦ | $Cotgx$ | $-Cotgx-$ |
| ۱۱۸ | ۸ | $y=sinx$ | $y=sin^{۲}x$ |
| ۱۱۸ | ۸ | $\frac{۱}{۲}sin۱x$ | $\frac{۱}{۲}sin۲x$ |
| ۱۱۸ | ۹ | $y=tgx=\frac{۱}{cosx}-۱$ | $y=tg^{۲}x=\frac{۱}{cos^{۲}x}-۱$ |
| ۱۲۲ | ٥ از آخر | b'c درمخرج | b'c" |
| ۱۲۳ | ۱۰ | $\frac{log\ a}{log\ b}$ | $\frac{log\ b}{log\ a}$ |
| ۱۲۳ | ۳ | $a\alpha^{۱x}$ | $a\alpha^{۲x}$ |
| ۱۲٦ | ۳ | a۱ | $a_{۱}$ |
| ۱۳۱ | سطر آخر | $M^{۲}$ | $M_{۲}$ |
| ۱۳۱ | ٤ از آخر | ۲K | $۲K\pi$ |
| ۱۳۳ | ٤ از آخر | cotg a− | cotg a= |
| ۱۳٤ | ٤ | $K\pi$ | $۲K\pi$ |
| ۱۳٥ | ٤ از آخر | a+ | a= |
| ۱۳۸ | ۷ | $۱-۳tg^{۳}a$ | $۱-۳tg^{۲}a$ |
| ۱٤۱ | ۹ | $\frac{a}{b}$ | $\frac{b}{a}$ |

| صفحه | سطر | غلط | صحیح |
| --- | --- | --- | --- |
| ۱۴۱ | ۳ از آخر | $+b=$ | $a+b=$ |
| ۱۴۴ | ۳ | P—o | P—b |
| ۱۴۴ | ۹ | obc | abc |
| ۱۴۶ | ۵ | $l_c =$ | $l_c \cos$ |
| ۱۴۹ | ۲ از آخر | $c-$ | $-c$ |
| ۱۵۲ | ۷ | $\cos y =$ | $\cos y = a$ |
| ۱۵۳ | ۵ | درخط ازبکنوع | خط از یکنوع |
| ۱۵۵ | ۷ از آخر | $\cos^{۳} c$ | $\cos^{۲} c$ |
| ۱۵۶ | ۵ | ۹۰B | $۹۰ - B$ |
| ۱۵۸ | در شکل ۲ در محل تلاقی اضلاع a و b حرف B نوشته شود | | |
| ۱۷۳ | ۹ از آخر | $M_{۱}$ | $M'$ |
| ۱۷۵ | ۵ از آخر | $H=C$ | $HC=$ |
| ۱۷۵ | ۳ از آخر | AH | AH″ |
| ۱۷۷ | ۲ | —] | —۱] |
| ۱۷۹ | در شکل ۶ محلهای B و C باهم عوض شوند | | |
| ۱۷۹ | در شکل ۷ بجای L حرف P نوشته شود | | |
| ۱۸۲ | ۲ | $ac+ba$ | $ac+bd$ |
| ۱۸۳ | ٤ | قطر | اقطار |
| ۱۸۵ | ۲ و ۵ | $\sqrt{۵+۱}$ | $\sqrt{۵}+۱$ |
| ۱۸۵ | ۹ | a | a‘ |

| صفحه | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۱۸٥ | ۱۲ | $r =$ و $a =$ | $r' =$ و $a' =$ |
| ۱۸٦ | ٦ از آخر | مماس | تماس |
| ۱۹۳ | ۲ | ISV... | ISo |
| ۱۹٦ | ۱۰ | درهرروی | درروی |
| ۱۹۹ | ٤ از آخر | $\frac{Mo}{Mo}$ | $\frac{Mo}{M'o}$ |
| ۲۲۱ | ۸ | جسم | حجم |
| ۲۲٥ | ٦ از آخر | اقطارمیباشد | اقطاری باشد |
| ۲۲۸ | ۱۳ | مانند P | مانند AB |
| ۲۲۸ | ۱۳ | خط P | خطAB |
| ۲۳۲ | ۹ | در | دو |
| ۲۳۳ | ۲ | -- | است |
| ۲۳٤ | ٦ | بپیچید | بپیچد |
| ۲۳۸ | ۱۰ | (ش۳) | (ش٤) |
| ۲۳۸ | ۱۳ | (ش٤) | (ش۳) |
| ۲٤۹ | ۱۱ | MF | MT |
| ۲٤۹ | ۱۲ | MT | MF |
| ۲٥۱ | | در (ش۷) محل تلاقی AB وخط عمود بر T'I را D بگذارید | |
| ۲٥٦ | ۳ از آخر | BA | B'A |
| ۲٥۸ | ٤ | M'M' | $M_1M'$ |

| صفحه | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۲۵۸ | نقطه‌تلاقی $A'M_1$ و $B'b$ را در (ش ۷) حرف B بگذارید | | |
| ۲۶۰ | ۷ از آخر | خط مشترك | مشترك‌خط |
| ۲۶۱ | ۷ از آخر | $oM$ | $oM_1$ |
| ۲۶۲ | ۱۰ از آخر | در | دو |
| ۲۷۰ | ۳ از آخر | ره | راه |
| ۲۷۴ | ۵ از آخر | $nm'$ | $nn'$ |
| ۲۷۶ | ٤ | — صفحه | - از نقطه صفحه |
| ۲۹۱ | ۵ از آخر | $\sqrt{R^2\omega^2-\omega^2}$ | $\sqrt{R^2\omega^2-v^2}$ |
| ۲۹۲ | ۸ از آخر | $b''$ | $f''$ |
| ۳۰۳ | ٦ | دو | در |
| ۳۰۷ | ۲ از آخر | $oR=$ | $oR=0$ |

# یادداشت

# یادداشت

یادداشت